

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 5

Exo 1. 1. a. La fonction φ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\varphi'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

En particulier, l'application φ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\varphi(0) = \sin(0) - 0 = 0$, nous en déduisons que

$$\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

b. De même, l'application w est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$w'(x) = \tan'(x) - 1 = 1 + \tan(x)^2 - 1 = \tan(x)^2 \geq 0 \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

En particulier, l'application w est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

c. Comme $w(0) = \tan(0) - 0 = 0$ et comme w est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, nous obtenons que

$$w(x) \geq w(0) = 0 \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

Comme $\varphi(x) \leq 0 \iff \sin(x) \leq x$ et $w(x) \geq 0 \iff \tan(x) \geq x$, il résulte des deux inégalités obtenues précédemment que

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

2. Rappelons que $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et que $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. De sorte que, pour $x \in \mathbb{R}$, il résulte de la première formule appliquée pour $x' = \frac{x}{2}$ que

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \left(\frac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{ix} - 2 + e^{-ix}}{-4}$$

De même, nous avons

$$\frac{1 - \cos(x)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = \frac{2 - e^{ix} - e^{-ix}}{4} = \sin^2 \frac{x}{2}$$

De même, nous remarquons que

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} &= 2 \frac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{2i} \frac{e^{ix/2} + e^{-ix/2}}{2} = \frac{(e^{ix/2})^2 - (e^{-ix/2})^2}{2i} \\ &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin(x) \end{aligned}$$

3. a. L'application f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et nous remarquons que

$$f'(x) = 2 + \cos(x) - x \sin(x) - 3 \cos(x) = 2 - x \sin(x) - 2 \cos(x) \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

b. En particulier, nous remarquons que

$$f'(x) = 2 - 2 \cos(x) - x \sin(x) = 4 \frac{1 - \cos(x)}{2} - 2 \frac{x}{2} \sin(x) \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

En particulier, il résulte des formules établies en 2) que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \frac{x}{2} \sin(x) \\ &= 2 \times \underbrace{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}_{\sin(x)} \tan \frac{x}{2} - 2 \frac{x}{2} \sin(x) \\ &= 2 \sin(x) \left(\tan \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

c. Comme la fonction $\sin$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, il résulte de 1.c que

$$f'(x) = 2 \underbrace{\sin(x)}_{\geq 0} \underbrace{\left(\tan \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right)}_{\geq 0 \text{ d'après 1.c}} \geq 0$$

d. Comme la dérivée de f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction f est croissante sur cet intervalle. Or $f(0) = 0$ de sorte que la fonction f est positive. A fortiori, nous obtenons que

$$\begin{aligned} &2x + x \cos(x) - 3 \sin(x) \geq 0 \\ \iff &3 \sin(x) \leq x \underbrace{(2 + \cos(x))}_{\geq 1} \\ \iff &\frac{3 \sin(x)}{2 + \cos(x)} \leq x \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

4. En procédant à une mise sous forme canonique, nous obtenons que

$$\begin{aligned} P(t) &= 2t^2 - t - 1 = 2 \left(t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\left(t - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{8}{16} \right) \\ &= 2 \left(\left(t - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right) = 2 \left(\left(t - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) \left(t - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) \right) \\ &= 2 \left((t - 1) \left(t + \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

En particulier, comme les racines du trinôme P sont 1 et $-\frac{1}{2}$, on a

$$P(t) < 0 \iff -\frac{1}{2} < t < 1 \text{ et } P(t) = 0 \iff t \in \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$$

5. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \cos(x) + \tan'(x) - 3 = 2 \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 3 = \frac{2 \cos^3(x) + 1 - 3 \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{(\cos(x) - 1)(2 \cos^2(x) - \cos(x) - 1)}{\cos^2(x)} = \frac{(\cos(x) - 1)P(\cos(x))}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

6. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, nous remarquons que $\cos(x) \in]0, 1]$, de sorte que $\cos(x) - 1 \leq 0$ et $P(\cos x) \leq 0$ et par conséquent $g'(x) \geq 0$. Comme $g(0) = 0$ et comme la fonction g est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, nous obtenons que

$$g(x) \geq g(0) = 0 \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

Et nous concluons en remarquant que

$$g(x) \geq 0 \iff 2\sin(x) + \tan(x) \geq 3x \iff \frac{2\sin(x) + \tan(x)}{3} \geq x$$

7. • Pour établir la première inégalité, il suffit de montrer que la fonction

$$h(x) = \tan(x) - \frac{2\sin(x) + \tan(x)}{3} = 2 \times \frac{\tan(x) - \sin(x)}{3}$$

est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, ce qui est résulte immédiatement de l'inégalité $\sin(x) \leq \tan(x)$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) démontrée au 1.c

- Pour établir la seconde inégalité, il suffit de montrer que l'application

$$k(x) = \sin(x) - \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)} = \frac{2\sin(x) + \sin(x)\cos(x) - 3\sin(x)}{2 + \cos(x)} = \sin(x) \frac{\cos(x) - 1}{2 + \cos(x)}$$

est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, ce qui est évident car $\sin(x) \geq 0$, $\cos(x) - 1 \leq 0$ et $2 + \cos(x) \geq 1$ sur cet intervalle

Pour établir ce genre d'inégalité, on utilise en général un tableau de variation. Ici, on a de la chance, il est possible d'exploiter une question précédemment traitée et une factorisation providentielle

Exo 2. 1. Il résulte de la formule de conditionnement que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(B_n \cap A_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = b_n \times \frac{1}{2} \\ b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De même, il résulte de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement $\{A_n, B_n, C_n\}$ que

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1 \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$.

- a. D'après les relations précédemment établies, nous avons

$$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = b_n \times \frac{1}{2} + a_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}u_n$$

En particulier, la suite u est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme $u_0 = a_0 + b_0 = P(A_0) + P(B_0) = 1 + 0 = 1$, nous remarquons que

$$u_n = u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Comme $A_n \cup B_n$ est le complémentaire de C_n et comme les événements A_n et B_n sont incompatibles, il vient

$$c_n = P(C_n) = 1 - P(A_n \cup B_n) = 1 - (P(A_n) + P(B_n)) = 1 - (a_n + b_n) = 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- b. De même, la suite v est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ car

$$v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = b_n \times \frac{1}{2} - a_n \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(a_n - b_n) = -\frac{1}{2}v_n$$

Comme $v_0 = a_0 - b_0 = P(A_0) - P(B_0) = 1 - 0 = 1$, il vient

$$v_n = v_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

En remarquant que $a_n = (u_n + v_n)/2$ et que $b_n = (u_n - v_n)/2$ nous en déduisons alors que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ b_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned} \quad (n \in \mathbb{N})$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous devons calculer la probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned} P_{C_{n+1}}((A_{n-1} \cup B_{n-1}) \cap C_n) &= P_{C_{n+1}}(A_{n-1} \cap C_n) + P_{C_{n+1}}(B_{n-1} \cap C_n) \\ &= \frac{P(A_{n-1} \cap C_n \cap C_{n+1})}{P(C_{n+1})} + \frac{P(B_{n-1} \cap C_n \cap C_{n+1})}{P(C_{n+1})} \\ &= \frac{P(A_{n-1} \cap C_n)}{P(C_{n+1})} + \frac{P(B_{n-1} \cap C_n)}{P(C_{n+1})} \\ &= \frac{P(A_{n-1}) \times P_{A_{n-1}}(C_n)}{P(C_{n+1})} + \frac{P(B_{n-1}) \times P_{B_{n-1}}(C_n)}{P(C_{n+1})} \\ &= \frac{a_{n-1} \frac{1}{2}}{c_{n+1}} + \frac{b_{n-1} \times \frac{1}{2}}{c_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})}{c_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}u_{n-1}}{c_{n+1}} = \frac{u_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{2}{2^{n+1} - 1} \end{aligned}$$

Exo 3. Calculs dans l'espace $\mathbb{K}^n$

On considère l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^4$ et les vecteurs $a := (2, -1, 1, 0)$, $b := (-1, 2, -2, 1)$, $c := (-2, 2, -3, 1)$, $d := (1, 4, -2, 2)$ et $e := (8, 2, 5, 1)$.

1. La famille (c, d, e) est liée car

$$-3c + 2d - e = -3(-2, 2, -3, 1) + 2(1, 4, -2, 2) - (8, 2, 5, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

J'avais mal lu la consigne et j'ai bêtement prouvé que la famille (a, b, c) est libre ci dessous

conclusion : bien lire les questions posées

Montrons que la famille (c, d, e) est libre. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $0 = xa + yb + zc = (2x - y - 2z, -x + 2y + 2z, x - 2y - 3z, y + z)$. En remarquant que

$$\begin{cases} 2x & -y & +2z & = 0 \\ -x & +2y & +2z & = 0 \\ x & -2y & -3z & = 0 \\ & \boxed{y} & +z & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x & +3z & = 0 \\ -x & & = 0 \\ x & -z & = 0 \\ & \boxed{y} & +z & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

A fortiori, la famille (a, b, c) est libre

Plus tard, avec les matrices et le rang, nous pourrions traiter cette question plus simplement et rapidement

2. Pour commencer, montrons que la famille (a, b, c, d) est génératrice. Soient $(X, Y, Z, T) \in \mathbb{R}^4$ et $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
& xa + yb + zc + td = (X, Y, Z, T) \\
\iff & (2x - y - 2z + t, -x + 2y + 2z + 4t, x - 2y - 3z - 2t, y + z + 2t) = (X, Y, Z, T) \\
\iff & \begin{cases} 2x & -y & -2z & +t & = X \\ -x & +2y & +2z & +4t & = Y \\ x & -2y & -3z & -2t & = Z \\ & \boxed{y} & & +z & +2t & = T \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 2x & & -z & +3t & = X + T \\ \boxed{-x} & & & & = Y - 2T \\ x & & -z & +2t & = Z + 2T \\ & \boxed{y} & +z & +2t & = T \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} & & -z & +3t & = X + 2Y - 3T \\ \boxed{-x} & & & & = Y - 2T \\ & \boxed{-z} & +2t & = Y + Z \\ & \boxed{y} & +z & +2t & = T \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} & \boxed{t} & = X + Y - Z - 3T \\ \boxed{-x} & & = Y - 2T \\ & \boxed{-z} & +2t & = Y + Z \\ & \boxed{y} & +4t & = Y + Z + T \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} & \boxed{t} & = X + Y - Z - 3T \\ \boxed{-x} & & = Y - 2T \\ & \boxed{-z} & = -2X - Y + 3Z + 6T \\ & \boxed{y} & = -4X - 3Y + 5Z + 13T \end{cases}
\end{aligned}$$

En particulier, nous remarquons que ce système possède pour chaque valeur de (X, Y, Z, T) une unique solution, ce qui prouve que la famille (a, b, c, d) est génératrice. En remarquant que ce système n'admet qu'une seule solution (la solution $x = y = z = t = 0$) lorsque $X = Y = Z = T = 0$, nous en déduisons également que la famille (a, b, c, d) est libre. En particulier, la famille (a, b, c, d) est une base.

Et dans quelques semaines, un simple calcul de rang pour traiter cette question...

3. Nous avons évidemment $c = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c + 0 \cdot d$, De sorte que les coordonnées de

c dans la base (a, b, c, d) sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, les coordonnées de d sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, en prenant $(X, Y, Z, T) = e$ dans la résolution de système précédent, nous obtenons $x = 0$, $y = 0$; $z = -3$ et $t = 2$ et nous remarquons effectivement que

$$0 \cdot (2, -1, 1, 0) + 0 \cdot (-1, 2, -2, 1) - 3 \cdot (-2, 2, -3, 1) + 2 \cdot (1, 4, -2, 2) = (8, 2, 5, 1).$$

En particulier, les coordonnées de e dans la base (a,b,c,d) sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z + T \text{ et } y = 2t\} = \{(z+t, 2t, z, t) : (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{z(1,0,1,0) + t(1,2,0,1) : (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,0,1,0), (1,2,0,1)) \end{aligned}$$

En particulier, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\{(1,0,1,0), (1,2,0,1)\}$ qui est libre car elle comporte deux vecteurs non-colinéaires. En particulier, c'est une base de G . *D'une pierre trois coups...*

5. Pour $(x,y,z,t) = c = (-2, 2, -3, 1) \in \mathbb{R}^4$, nous remarquons que $x - z - t = -2 + 3 - 1 = 0$ et $y - 2t = 2 - 2 = 0$. En particulier $c \in G$. La famille $\mathcal{F} = \{c, (1,0,1,0)\}$ constitue une famille libre de vecteurs de G (deux vecteurs non colinéaires). Et comme $(1,2,0,1) = c + 3 \cdot (1,0,1,0)$, nous observons que $(1,2,0,1) \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ et a fortiori que

$$G = \text{Vect}((1,0,1,0), (1,2,0,1)) \subset \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$$

En particulier, nous avons $\text{Vect}(\mathcal{F}) = G$ de sorte que la famille libre $\mathcal{F}$ engendre G . C'est donc une base de G . *Plus tard, cela sera plus facile avec la dimension et le théorème de la base incomplète...*

6. Soit $m \in \mathbb{R}$. Les vecteurs u_m et v_m forment une famille libre ssi le système suivant possède une unique solution (la solution nulle)

$$\begin{aligned} xu_m + yv_m = 0 &\iff x(-2m, 2m, 0, 0) + y(m+6, -4, m+2, 0) = 0 \\ &\iff \begin{cases} -2mx + (m+6)y = 0 \\ 2mx - 4y = 0 \\ y(m+2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $m \neq -2$, $y = 0$ de sorte que si $m \neq 0$, $x = 0$ et la famille est libre.
- Si $m = -2$, le système est équivalent à l'équation $4x + 4y = 0$ qui a une infinité de solution (x,y) , la famille est liée
- Si $m = 0$, le système est équivalent à l'équation $y = 0$ qui a une infinité de solution (x,y) , la famille est liée

En conclusion, la famille est libre ssi $m \notin \{-2, 0\}$. *Question facile via les matrices et un calcul de rang*

7. Les vecteurs u_m et v_m ne peuvent pas constituer une base de G parce que v_m n'appartient pas à G (sauf si $m = 0$ mais dans ce cas, la famille est liée)
8. $F = \text{Vect}(c,d)$ de sorte que

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y,z,t) = \alpha c + \beta d \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y = 2\alpha + 4\beta \\ z = 3\alpha + 2\beta \\ t = \alpha + 2\beta \end{cases} \\
&\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - 2t = -3\beta \\ y - 2t = 0 \\ z - 3t = -4\beta \\ t = \alpha + 2\beta \end{cases} \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} 4x - 8t = -12\beta \\ y - 2t = 0 \\ z - 3t = -4\beta \\ 2t = 2\alpha + 4\beta \end{cases} \\
&\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} 4x - 2t - 3z = 0 \\ y - 2t = 0 \\ z - 3t = -4\beta \\ z - t = 2\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 2t - 3z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les équations cartésiennes que vérifient les vecteurs (x,y,z,t) de F sont donc $y - 2t = 0$ et $4x - 3z - 2t = 0$. *C'est une question (très) difficile. Le procédé qui a été utilisé ici est une élimination : on a utilisé deux des quatre équations pour éliminer les variables α et β et obtenir 2 équations ne faisant intervenir que x,y,z et t .*

9. Les vecteurs de $F \cap G$ sont les vecteurs (x,y,z,t) vérifiant le système d'équations

$$\begin{cases} x - z - t = 0 \\ y - 2t = 0 \\ 4x - 3z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z - t = 0 \\ y - 2t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

En particulier, nous remarquons que $F \cap G = \text{Vect}((-1,2,-2,1))$. La famille $\mathcal{F} = \{(-1,2,-2,1)\}$ est une famille génératrice de $F \cap G$ d'après la question précédente. Comme c'est une famille comportant un unique vecteur non nul, elle est aussi libre de sorte que $\mathcal{F}$ est une base de $F \cap G$