

DEVOIR MAISON 6

A chaque journée de cours, Mademoiselle J. mange soit à la cantine de son lycée soit n'a pas le temps de manger en raison d'un temps d'attente trop long devant cette cantine. Précisément, quand le professeur lui permet de sortir de classe avant la sonnerie, elle parvient à manger avec probabilité $2/5$. Lorsque le professeur lui impose de sortir à la sonnerie, elle n'a alors qu'une chance sur cinq de manger. Malgré son programme fort chargé, le professeur compatit au pauvre sort de Mademoiselle J. et la laisse donc sortir en avance avec probabilité $2/3$. On suppose que, d'un jour à l'autre, les décisions du professeur de laisser ou non sortir Mademoiselle J. en avance sont indépendantes. On introduit les événements suivants :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n : « Mademoiselle J. parvient à manger au $n^{\text{ème}}$ jour de cours »
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n : « Le professeur laisse sortir Mademoiselle J. en avance au $n^{\text{ème}}$ jour de cours »
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « Mademoiselle elle n'a pas mangé deux fois de suite pour la première fois aux $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ jours de cours »

1. Dans cette question, on considère un jour de cours $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
 - a. Montrer que $P(M_n) = \frac{1}{3}$
 - b. On constate que Mademoiselle J. n'a pas mangé, quelle est la probabilité que l'enseignant ne l'ait pas laissé sortir à l'avance.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = P(A_n)$.
 - a. Calculer u_2 et u_3 .
 - b. A l'aide de la formule des probabilités totales établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$

*On utilisera le système complet d'événements $\{M_1, \overline{M_1} \cap M_2, \overline{M_1} \cap \overline{M_2}\}$.
(Question difficile et subtile)*

- c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
 - a. Montrer que S_n représente la probabilité d'un certain événement, dont on donnera un libellé explicite.
 - b. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite et interpréter le résultat.