CORRECTION DU DEVOIR MAISON 6

1. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Il résulte de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement $\{E_n, \overline{E_n}\}$ que

$$P(M_n) = P(E_n)\times P_{E_n}(M_n)+P(\overline{E_n})\times P_{\overline{E_n}}(M_n) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{4+1}{3\times 5} = \frac{1}{3}$$

   b. D'après la formule de Bayes (appliqué au système complet d'événement $\{E_n, \overline{E_n}\}$), on a

$$P_{\overline{M_n}}(\overline{E_n}) = \frac{P(\overline{E_n}\cap\overline{M_n})}{P(\overline{M_n}} = \frac{P(\overline{E_n})\times P_{\overline{E_n}}(\overline{M_n})}{P(\overline{M_n})} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = P(A_n)$.

   a. Il résulte de l'indépendance mutuelle des événements M_1, M_2 et M_3 que

$$u_2 = P(\overline{M_1}\cap\overline{M_2}) = P(\overline{M_1})\times P(\overline{M_2}) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2$$
$$u_3 = P(M_1\cap\overline{M_2}\cap\overline{M_3}) = P(M_1)\times P(\overline{M_2})\times P(\overline{M_3}) = \tfrac{1}{3}\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^2$$

   b. Soit $n \geqslant 2$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{M_1, \overline{M_1}\cap M_2, \overline{M_1}\cap\overline{M_2}\}$, on déduit de l'égalité $\overline{M_1}\cap M_2\cap A_{n+2} = \emptyset$ que

$$\begin{aligned} P(A_{n+2}) &= P(A_{n+2}\cap M_1) + P(A_{n+2}\cap\overline{M_1}\cap M_2) + P(A_{n+2}\cap\overline{M_1}\cap\overline{M_2}) \\ &= P(M_1)\times P_{M_1}(A_{n+2}) + P(\overline{M_1}\cap M_2)\times P_{\overline{M_1}\cap M_2}(A_{n+2}) + P(\emptyset) \end{aligned}$$

   Il résulte alors de l'indépendance des événements M_1 et M_2 et de $P(M_n) = 1/3 \quad (n \geqslant 1)$ que

$$\begin{aligned} P(A_{n+2}) &= P(M_1)\times P_{M_1}(A_{n+2}) + P(\overline{M_1})\times P(M_2)\times P_{\overline{M_1}\cap M_2}(A_{n+2}) + 0 \\ &= \tfrac{1}{3}\times P_{M_1}(A_{n+2}) + \tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{3}\times P_{\overline{M_1}\cap M_2}(A_{n+2}) \end{aligned}$$

   Ensuite, nous remarquons que
   ici, agit la fameuse magie des probas conditionnelles : Elles nous « permettent » de dire que deux probabilités complétement différentes sont intuitivement égales. C'est extrémement dur à justifier et globalement, si vous faites correctement ce raisonnement au concours, on ne vous en tiendra pas rigueur, au contraire (c'est le raisonnement attendu et c'est un abus généralempent toléré... et de toute façon, il n'y a pas réellement moyen de faire simplement ou autrement sans faire des calculs horribles et monstrueux)

$$P_{M_1}(A_{n+2}) = P(A_{n+1}) = a_{n+1}$$
$$P_{\overline{M_1}\cap M_2}(A_{n+2}) = P(A_n) = a_n$$

   En particulier, nous concluons que

$$u_{n+2} = P(A_{n+2}) = \frac{1}{3}\times P_{A_{n+1}} + \frac{2}{9}\times P(A_n) = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n \qquad (n \geqslant 2)$$

c. La suite u satisfait une récurrence linéaire homogène d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9} = (x - \tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{1}{6^2} - \tfrac{2}{9} = (x - \tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{9}{6^2} \\ &= \left(x - \tfrac{1}{6} - \tfrac{3}{6}\right)\left(x - \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{6}\right) = \left(x - \tfrac{2}{3}\right)\left(x + \tfrac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Comme les racines de ce trinôme sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, nous remarquons qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$u_n = \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (n \geqslant 2)$$

Comme $u_2 = \frac{4}{3^2}$ et comme $u_3 = \frac{4}{3^3}$, il vient

$$\begin{cases} u_2 = \frac{4}{3^2} = \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ u_3 = \frac{4}{3^3} = \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \frac{8}{9} = \mu\frac{12}{9} \\ u_3 = \frac{4}{3^3} = \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{2}{3} \\ \lambda = \left(\frac{4}{3^3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\right) \times (-3)^3 = -\left(4 - \frac{2}{3} \times 8\right) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

En conclusion, on a

$$u_n = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (n \geqslant 2)$$

3. a. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n P(A_k) = P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \\ &= P(\text{« J. n'a pas mangé deux fois de suite entre le premier jour et le } n^{\text{ième}} \text{ jour »}) \end{aligned}$$

b. Il résulte de la formule que nous avons trouvé pour u_n (et des formules bien connues pour les sommes des termes de suites géométriques de raison différente de 1) que

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k \left(\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \\ &= \textstyle\frac{4}{3}\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ & \frac{4}{3}\frac{-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\frac{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Et il n'est pas trop difficile, au vu de cette dernière formule, de voir que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{4}{3}\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \ 1$$

En particulier, si n est un grand nombre, il est presque sûr que mademoiselle J. Va rater un repas deux jours consécutifs..