DEVOIR MAISON 7

PROBLÈME 1 - UNE ÉLECTION EN DEUX TOURS ... OU TROIS

A. **Les candidats en lice**
Lors d'une élection, 7 candidats se présentent : 6 hommes et une femme. On suppose qu'il n'y jamais d'ex-aequo.

1. De combien de façons ces candidats peuvent-ils être classés à l'issue du scrutin s'il n'y a pas d'ex-aequo ?
2. Combien y a-t-il de trios de tête possibles (c'est-à-dire de possibilités pour les premier, deuxième et troisième) ?
3. Combien y a-t-il de trios de tête possibles avec la candidate à l'une des trois places ?

B. **Les reports de voix pour le second tour**
À l'issue du premier tour, le candidat A a obtenu 40% des suffrages, le candidat B a obtenu 30% et les 30% restant se répartissent entre les autres candidats, les votes blancs et nuls. Seuls les candidats A et B restent en lice pour le second tour et on suppose que les votants du second tour sont exactement ceux ayant voté au premier (on ne considère donc pas les abstentionnistes du premier ou du second tour).
Après une relecture des programmes des deux candidats, il s'avère que :

- un individu ayant voté pour A au premier tour a une probabilité égale à 0,7 de confirmer son vote au second tour, une probabilité égale à 0,2 de finalement voter pour B au second tour et une probabilité égale à 0,1 de voter blanc ou nul au second tour ;
- un individu ayant voté pour B au premier tour a une probabilité égale à 0,85 de confirmer son vote au second tour, une probabilité égale à 0,05 de finalement voter pour A au second tour et une probabilité égale à 0,1 de voter blanc ou nul au second tour ;
- un individu ayant voté pour un autre candidat, voté blanc ou voté nul au premier tour a une probabilité égale à 0,3 de voter pour A au second tour, une probabilité égale à 0,4 de voter pour B au second tour et une probabilité égale à 0,3 de voter blanc ou nul au second tour.

1. On choisit un électeur au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il vote pour A au second tour ? Quelle est la probabilité qu'il vote pour B au second tour ?
2. On choisit un électeur au hasard.
Sachant que cet électeur a voté pour B au second tour, quelle est la probabilité qu'il ait également voté pour B au premier tour ?
3. Quelle est la probabilité qu'un électeur, choisi au hasard, ait voté de la même façon aux deux tours (c'est-à-dire deux fois pour A, deux fois pour B ou deux fois ni pour A, ni pour B) ?

C. **La campagne sur internet** Lors des derniers jours de la campagne de « l'entre deux tours », l'équipe de communiquants de l'un des deux candidats décide d'être très active sur les réseaux sociaux en postant régulièrement des messages tantôt valorisant le programme de leur candidat, tantôt dénigrant celui de leur adversaire. On suppose que :

- si le $k^{\text{ième}}$ message valorise le programme de son candidat alors il y a une probabilité égale à 0,6 que le suivant valorise à nouveau ce programme (donc une probabilité égale à 0,4 qu'il dénigre le programme du candidat adverse)
- si le $k^{\text{ième}}$ message dénigre le programme du candidat adverse alors il y a une probabilité égale à 0,8 que le suivant valorise le programme de son candidat (donc une probabilité égale à 0,2 qu'il dénigre à nouveau le programme du candidat adverse).

  On note V_k l'événement « le $k^{\text{ième}}$ message valorise le programme de son candidat ».

1. Quelles sont les probabilités directement données par l'énoncé ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(V_{k+1})$ en fonction de $P(V_k)$ (en justifiant bien).
3. Déterminer l'expression de $P(V_k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et de $P(V_0)$.
4. Quelle est la limite de la suite $\big(P(V_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$

D. **Épilogue**

Le scrutin du second tour ayant été largement entaché de fraudes, les candidats A et B décident, dans la plus pure tradition française, de régler leur différend par un duel au pistolet.

Les candidats vont tirer à tour de rôle, le premier qui touche son adversaire a gagné. Le candidat A tire en premier et a, à chaque tir, la probabilité p_1 de toucher son adversaire alors que, pour le candidat B, cette probabilité est égale à p_2 (avec $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$).

On supposera les différents tirs mutuellement indépendants (bien que le succès d'un tir mette un terme à l'expérience).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- A_n l'événement « le tireur A effectue un $n^{\text{ième}}$ tir et touche son adversaire »
- B_n l'événement « le tireur B effectue un $n^{\text{ième}}$ tir et touche son adversaire »
- C_n l'événement « le $n^{\text{ième}}$ tir est réussi ».

1. Calculer $P(C_1)$, $P(C_2)$ et $P(C_3)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de $P(C_n)$.
3. Déterminer la limite quand N tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(C_n)$.

PROBLÈME 2 - TIRAGES SANS REMISE PUIS AVEC REMISE

Soit n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables. Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

On suppose qu'il existe un espace probabilisé, d'univers Ω et de probabilité P, permettant de modéliser cette expérience.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

- X_k l'événement « le joueur A tire k boules noires avant de tirer une boule blanche »

- Y_k l'événement « le joueur B tire k boules noires avant de tirer une boule blanche ».

Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et si les tirages successifs ont donné successivement des boules noire, blanche, noire, noire, noire, noire et blanche, alors :

- A a effectué deux tirages, il a tiré une boule noire puis une boule blanche
- l'urne contenait alors 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- B a alors effectué cinq tirages successifs dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposées dans l'urne puis il a pioché une boule blanche
- les événements X_1 et Y_4 sont donc réalisés.

A. **Étude du cas particulier où b et n valent 2**

On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

1. Calculer les probabilités des événements X_0 , X_1 et X_2.
2. Montrer que $P(Y_0) = \frac{1}{2}$.
3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, calculer les probabilités suivantes :

$$P(X_0 \cap Y_i), \qquad P(X_1 \cap Y_i), \qquad P(X_2 \cap Y_i)$$

4. En déduire, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'expression de $P(Y_i)$ puis déterminer la limite (éventuelle) quand N tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} P(Y_i)$

B. **Retour au cas général**

1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, calculer $P(X_k)$ et montrer que : $P(X_k) = \dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$
2. Utiliser la question qui précède pour justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$

   Par conséquent on vient de démontrer la formule suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{N} \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1} \qquad (1)$$

3. Soit $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Comparer $k\dbinom{k+a}{a}$ et $(a+1)\dbinom{k+1}{a+1}$ puis justifier que

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}$$

4. A l'aide des questions précédentes, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)P(X_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X_k)$
5. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et tout $i \in \mathbb{N}$, calculer $P(X_k \cap Y_i)$.

   Les événements X_k et Y_i sont-ils indépendants ?