DEVOIR MAISON 7

CORRECTION DU PROBLÈME 1 - UNE ÉLECTION EN DEUX TOURS ... OU TROIS

A. 1. D'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements (non-négligeables) $\{A_1,B_1,R_1\}$, on a

$$\begin{array}{ll} P(A_2) & = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) + P(R_1) \times P_{A_1}(A_2) \\ & \frac{40}{100} \times \frac{7}{10} + \frac{30}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{3}{10} \\ P(B_2) & = P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(R_1) \times P_{A_1}(B_2) \\ & \frac{40}{100} \times \frac{2}{10} + \frac{30}{100} \times \frac{85}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{4}{10} = \frac{800+2550+1200}{10000} = \frac{4550}{10000} \end{array}$$

2. Il résulte de la formule des probabilité conditionnelle, de la formule de conditionnement et du résultat de la aquestion précédente que

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{P_{B_1 \cap B_2}}{P(B_2)} = \frac{P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)}{4550/10000} = \frac{30}{100} \times \frac{85}{100} \times \frac{10000}{4550} = \frac{2550}{4550}$$

3. Comme les événements $A_1 \cap A_2$, $B_1 \cap B_2$ et $C_1 \cap C_2$ sont mutuellement indépendants, il résulte de la formule de conditionnement que

$$\begin{array}{ll} & P(\text{« un électeur vote de la même façon aux deux tours »}) \\ = & P\big((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)\big) \\ = & P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap C_2) \\ = & P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \\ = & \frac{40}{100} \times \frac{7}{10} + \frac{30}{100} \times \frac{85}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{3}{10} \\ = & \frac{2800+2550+900}{10000} = \frac{6250}{10000} \end{array}$$

B. **La campagne sur internet**

1. Les probabilités données par l'énoncés sont

$$P_{V_k}(V_{k+1}) = \frac{6}{10}, \quad P_{V_k}(\overline{V_{k+1}}) = \frac{4}{10}, \quad P_{\overline{V_k}}(V_{k+1}) = \frac{8}{10} \quad \text{et} \quad P_{\overline{V_k}}(\overline{V_{k+1}}) = \frac{2}{10},$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, appliqué au système complet d'événements (non-négligeables) $\{V_k, \overline{V_k}\}$, il vient

$$\begin{array}{ll} P(V_{k+1}) & = P(V_k) \times P_{V_k}(V_{k+1}) + P(\overline{V_k}) \times P_{\overline{V_k}}(V_{k+1}) \\ & = P(V_k) \times \frac{6}{10} + \big(1 - P(V_k)\big) \times \frac{8}{10} \\ & = -\frac{2}{10} P(V_k) + \frac{8}{10} \end{array}$$

3. D'après l'expression obtenue précédemment, la suite définie par $u_k = P(V_k)$ pour $k \geqslant 0$ est arithmético-géométrique. En posant $c = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ l'unique solution de l'équation $c = -\frac{2}{10}c + \frac{8}{10}$, nous remarquons que la suite définie par $v_n = u_n - c$ satisfait la relation

$$v_0 = u_0 - c = P(V_0) - \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad v_{k+1} = -\frac{2}{10} v_k \quad (k \geqslant 0)$$

La suite v étant géométrique de raison $-\frac{2}{10}$, nous en déduisons d'une part que

$$v_k = v_0\left(-\frac{2}{10}\right)^k = \left(P(V_0)-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{10}\right)^k \qquad (k\geqslant 0)$$

et d'autre part que

$$P(V_k) = u_k = v_k + c = \frac{2}{3} + \left(P(V_0)-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{10}\right)^k \qquad (k\geqslant 0)$$

4. Comme la raison de la suite v est dans $]-1,1[$, on a $\lim v = 0$. A fortiori, $\lim_{k\to+\infty} P(V_k) = \lim u = \lim\left(v+\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

C. 1. Il résulte de l'indépendance entre les tirs et de la formule de conditionnement que

$$\begin{array}{l} P(C_1) = P(A_1) = p_1 \\ P(C_2) = P(\overline{A_1}\cap B_1) = P(\overline{A_1})\times P(B_1) = (1-p_1)p_2 \\ P(C_3) = P(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap A_2) = P(\overline{A_1})\times P(\overline{B_1})\times P(A_2) = (1-p_1)(1-p_2)p_1 \end{array}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, Selon la parité de n, on va avoir deux formules différentes :
   - Lorsque n est pair, posons $n=2k$ et remarquons que

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P\left(\overline{A_k}B_n\cap\textstyle\bigcap_{i=1}^{k-1}(\overline{A_i}\cap\overline{B_i})\right) \\ &= P(\overline{A_k})\times P(B_n)\times\textstyle\prod_{i=1}^{k-1}\left(P(\overline{A_i})\times P(\overline{B_i})\right) \\ &= (1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2 = (1-p_1)^{n/2}(1-p_2)^{n/2-1}p_2 \end{aligned}$$

   - Lorsque n est impair, posons $n=2k+1$ et remarquons que

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P\left(A_n\cap\textstyle\bigcap_{i=1}^{k}(\overline{A_i}\cap\overline{B_i})\right) \\ &= P(A_n)\times\textstyle\prod_{i=1}^{k}\left(P(\overline{A_i})\times P(\overline{B_i})\right) \\ &= p_1(1-p_1)^k(1-p_2)^k = (1-p_1)^{n/2}(1-p_2)^{n/2}p_1 \end{aligned}$$

3. La somme dont on doit calculer la limite est pénible à exprimer, à cause des deux cas pairs et impairs. Rusons pour ne faire qu'un seul cas et essayer de limiter notre souffrance, en commençant par calculer la valeur de la somme suivante

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{2N} P(C_n) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N\\ n=2k}} P(C_n) + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N\\ n=2k+1}} P(C_n) \\ &= \sum_{k=1}^{N} P(C_{2k}) + \sum_{k=0}^{N-1} P(C_{2k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N}(1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2 + \sum_{k=0}^{N-1}(1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1 \end{aligned}$$

Il résulte alors des formules bien connues pour ces deux sommes des termes de suites géométriques de raison $(1-p_1)(1-p_2)\neq 1$ que

$$S_N = \frac{(1-p_1)p2-(1-p_1)^{N+1}(1-p_2)^N p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)} + \frac{p_1-(1-p_1)^{N+1}(1-p_2)^{N+1}p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

comme $0 \leqslant 1 - p_1 < 1$et $0 \leqslant 1 - p_2 < 1$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} (1 - p_1)^n = 0 = \lim_{n + \infty} (1 - p_2)^n$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \lim_{N \to +\infty} S_N &= \tfrac{(1-p_1)p2}{1-(1-p_1)(1-p_2)} + \tfrac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \\ &= \tfrac{(1-p_1)p2+p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \tfrac{p_2-p_1p2+p_1}{1-(1-p_1-p_2+p_1p_2)} = 1 \end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que la suite définie par $s_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(C_n)$ pour $N \geqslant 0$ est croissante (car on ajoute des nombres positifs ou nuls) et nous déduisons de la relation $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leqslant n \leqslant 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ (en bref, on encadre n entre deux nombres pairs en dessous et au dessus que l'on exprime via les parties entières) que

$$S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = s_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leqslant s_n \leqslant s_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} = S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \qquad (n \geqslant 0)$$

En remarquant que la suite tout à gauche et la suite tout à droite convergent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, il résulte alors du principe des gendarmes que

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 1$$

Si l'un d'entre vous a une preuve **juste, rigoureuse, plus simple ou plus élégante** *utilisant les suites et les valeurs trouvées pour $P(C_n)$, je suis preneur.*
(dire que $\Omega = \cup_{n=0}^{\infty} C_n$, et que $(C_n)_{n \geqslant 0}$ est un système complet d'événements, etc... ne compte pas)

CORRECTION DU PROBLÈME 2 - TIRAGES SANS REMISE PUIS AVEC REMISE

A. Étude du cas particulier où b et n valent 2

1. On a $P(X_0) = P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (probabilité uniforme pour le tirage d'une des deux blanches parmi les 4 boules). De même, il résulte de la formule de conditionnement (et de la formule des probabilités composées pour X_2) que

$$P(X_1) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) = \tfrac{2}{4} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}$$
$$P(X_2) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \tfrac{2}{4} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{2}{2} = \tfrac{1}{6}$$

2. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (non négligeables) $\{X_0,X_1,X_2\}$, on a

$$\begin{aligned} P(Y_0) &= P(X_0) \times P_{X_0}(Y_0) + P(X_1) \times P_{X_1}(Y_0) + P(X_2) \times P_{X_2}(Y_0) \\ &= \tfrac{1}{2} \times P_{B_1}(B'_2) + \tfrac{1}{3} \times P_{N_1 \cap B_2}(B'_3) + \tfrac{1}{6} \times P_{N_1 \cap N_2 \cap B_3}(B'_4) \qquad = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} \times \end{aligned}$$

3. Soit $i \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned}
P(X_0 \cap Y_i) &= P(X_0) \times P_{X_0}(Y_i) = \tfrac{1}{2} \times P_{B_1}(N'_2 \cap \cdots \cap N'_{1+i} \cap B_{2+i}) \\
&= \tfrac{1}{2} \times P_{B_1}(N'_2) \times \cdots \times P_{B_1 \cap N'_2 \cap \cdots \cap N'_{1+i}}(B_{2+i}) \\
&= \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{2}{3}\right)^i \times \tfrac{1}{3} \\
P(X_1 \cap Y_i) &= P(X_1) \times P_{X_1}(Y_i) = \tfrac{1}{3} \times P_{N_1 \cap B_2}(N'_3 \cap \cdots \cap N'_{2+i} \cap B_{3+i}) \\
&= \tfrac{1}{3} \times P_{N_1 \cap B_2}(N'_3) \times \cdots \times P_{N_1 \cap B_2 \cap N'_3 \cap \cdots \cap N'_{2+i}}(B_{3+i}) \\
&= \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^i \times \tfrac{1}{2} \\
P(X_2 \cap Y_i) &= P(X_2) \times P_{X_2}(Y_i) = \tfrac{1}{6} \times P_{N_1 \cap N_2 \cap B_3}(N'_4 \cap \cdots \cap N'_{3+i} \cap B'_{4+i}) \\
&= \tfrac{1}{6} \times P_{N_1 \cap N_2 \cap B_3}(B'_4) = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{1}{1} = \tfrac{1}{6} \text{ si } i = 0 \\
&= \tfrac{1}{6} \times 0 = 0 \text{ si } i \geqslant 1
\end{aligned}$$

4. Soit $i \geqslant 1$. D'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements $\{X_0,X_1,X_2$, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
P(Y_i) &= P(X_0 \cap Y_i) + P(X_1 \cap Y_i) + P(X_2 \cap Y_i) \\
&= \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{2}{3}\right)^i \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^i \times \tfrac{1}{2} + 0
\end{aligned}$$

En particulier, nous utilisons l'égalité $P(Y_0) = 1$ $F2$ et nous obtenons deux sommes de termes de suite géométriques de raison différente de 1 en calculant

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^N P(Y_i) &= P(Y_0) + \textstyle\sum_{i=1}^N \left(\tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{2}{3}\right)^i \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^i \times \tfrac{1}{2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} \times \textstyle\sum_{i=1}^N \left(\tfrac{2}{3}\right)^i + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} \times \textstyle\sum_{i=1}^N \left(\tfrac{1}{2}\right)^i \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \tfrac{1}{6} \times \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque N tends vers $+\infty$, nous obtenons que

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^N P(Y_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{1}{6} \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

B. **Retour au cas général**

1. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, nous remarquons que $P(X_k) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_k \cap B_{k+1})$ et nous déduisons de la formule des probabilités composées que

$$\begin{aligned}
P(X_k) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times \cdots \times P_{N_1 \cap \cdots \cap N_k}(B_{k+1}) \\
&= \textstyle\prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{n+b+1-i} \times \frac{b}{n+b-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{(n+b-k)!}{(n+b)!} \times \frac{b}{n+b-k} \\
&= \frac{(n+b-k-1)!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{(n+b)!} \times b \\
&= \frac{(n+b-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!} \times \frac{n!(b-1)!}{(n+b)!} \times b \\
&= \binom{n+b-k-1}{b-1} \times \frac{n!b!}{(n+b)!} \\
&= \binom{n+b-k-1}{b-1} \times \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \\
&= \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}
\end{aligned}$$

2. Comme $\{X_0, \cdots, X_n\}$ est un système complet d'événements de Ω (puisque ces événements sont incompatibles deux à deux et puisque le joueur A tire

forcément un nombre k de noires dans $[\![0,n]\!]$ avant de tirer une blanche...), nous avons

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_k)$$

Il résulte alors de la formule trouvée précedemment que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$$

En plutipliant de chaque coté par $\binom{n+b}{b}$, il vient alors que

$$\binom{n+b}{b} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1}$$

Par conséquent on vient de démontrer la formule suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{N} \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1} \tag{1}$$

3. Soit $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} k\tbinom{k+a}{a} &= k\tfrac{(k+a)!}{a!k!} = \tfrac{(k+a)!}{a!(k-1)!} = (a+1)\tfrac{(k+a)!}{(a+1)!(k-1)!} \\ &= (a+1)\tfrac{(k+a)!}{(a+1)!(k-1)!} = (a+1)\tbinom{k+a}{a+1} \end{aligned}$$

En particulier, nous désuisons de la relation de Chasles que

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = 0 + \sum_{k=1}^{N} k\binom{k+a}{a} = \sum_{k=1}^{N} (a+1)\binom{k+a}{a+1} = (a+1)\sum_{k=1}^{N} \binom{k+a}{a+1}$$

En procédant au changement d'indice $\ell = k-1$, il suit

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{\ell=0}^{N-1} \binom{\ell+1+a}{a+1}$$

Et il résulte de la formule 1 obtenue plus haute (pour $N' = N-1$, $k' = \ell$ et $a' = a+1$) que

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{N-1+a+1+1}{a+1+1} = (a+1)\binom{N+a+1}{a+2}$$

4. D'après la formule précédemment obtenue pour $P(X_k)$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)P(X_k) = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n-k+b-1}{b-1}$$

En procédant au changement d'indice $k' = n-k$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X_k)=\frac{1}{\binom{n+b}{b}}\sum_{k'=0}^{n}k'\binom{k'+b-1}{b-1}$$

On reconnait alors la formule obtenue à la question précédente (pour $N=n$, $k=k'$ et $a=b-1$), de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X_k)=\frac{1}{\binom{n+b}{b}}(b-1+1)\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{\ell+1+b-1}{b-1+1}=\frac{1}{\binom{n+b}{b}}b\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{\ell+b}{b}$$

Il résulte alors de la formule 1 (pour $N=n-1$, $a=b$ et $k=\ell$) que

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X_k)=\frac{1}{\binom{n+b}{b}}b\binom{n-1+b+1}{b+1}=\frac{b!n!}{(n+b)!}b\frac{(n+b)!}{(b+1)!(n-1)!}=\frac{bn}{b+1}$$

Comme $\sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X_k)+\sum_{k=0}^{n}kP(X_k)=\sum_{k=0}^{n}nP(X_k)=n\sum_{k=0}^{n}P(X_k)=n$, nous concluons alors que

$$\sum_{k=0}^{n}kP(X_k)=n-\frac{bn}{b+1}=\frac{n}{b+1}$$

5. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ et tout $i\in\mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned}P(X_k\cap Y_i)&=P(X_k)\times P_{X_k}(Y_i)=P(X_k)\times P_{N_1\cap\cdots\cap N_k\cap B_{k+1}}(N'_{k+2}\cap\cdots\cap N_{k+1+i}\cap B'_{k+2+i})\\&=P(X_k)\times\left(\tfrac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i\tfrac{b-1}{n+b-k-1}=\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\frac{n+b}{b}}\times\left(\tfrac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i\tfrac{b-1}{n+b-k-1}\end{aligned}$$

Pour savoir si les événements X_k et Y_i sont indépendants, il est nécessaire de connaître la probabilité $P(Y_i)$, que nous n'avons pas. Son calcul a l'air très difficile (voire infaisable). Par exemple, on a

$$P(Y_i)=\sum_{k=0}^{n}P(X_k\cap Y_i)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\frac{n+b}{b}}\times\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i\frac{b-1}{n+b-k-1}$$

La somme précédente étant assez horrible, il n'est pas attendu des étudiants qu'ils sachent la calculer. De sorte que la question semble ambigue et mal posée.

L'auteur du sujet souhaitait certainement poser la question « Les événements X_k et Y_i sont ils indépendants pour tout i et pour tout k », à laquelle il est beaucoup plus facile de répondre. Par exemple, en remarquant que la probabilité $P_{X_k}(Y_i)=\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i\frac{b-1}{n+b-k-1}$ varie selon les valeurs de k (ce n'est apparemment pas une constante indépendante de k) et ne peut donc pas être égale à la probabilité $P(Y_i)$.

A fortiori, les événements X_k et Y_i ne peuvent pas être indépendants pour tout i et tout k.