DEVOIR MAISON 9

EXERCICE 1

Un grand classique : polynômes de Tchebycheff

On considère la suite des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Préciser P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer le coefficient dominant de P_n ainsi que son degré.
3. Etudier la parité des polynômes P_n.
4. Montrer l'identité fondamentale des polynômes de Tchebycheff de $1^{\text{ère}}$ espèce :

$$P_n(cos(x)) = cos(nx) \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}).$$

5. *Bonus* En déduire les racines de P_n ainsi que sa forme factorisée.

EXERCICE 2

Un autre classique : polynômes de Lagrange

1. D'abord un exemple : Déterminer, en raisonnant par analyse et synthèse, l'unique polynôme P de degré 3 tel que $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 0$ et $P(4) = 1$.
2. Cas général : soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels distincts deux à deux.
   a. Par analyse et synthèse, déterminer l'unique polynôme de degré n, noté L_0, tel que $L_0(a_0) = 1$ et $L_0(a_k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
   b. *bonus.* Plus généralement, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, déterminer l'unique polynôme de degré n, noté L_k, tel que $L_k(a_k) = 1$ et $L_k(a_j) = 0$ pour $j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}$.

EXERCICE 3

Soit la suite de polynômes (P_n) définie par : $P_1 = 1$ et

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!} \qquad (n \geqslant 2)$$

1. Ecrire P_2 et P_3 sous forme factorisée.
2. En déduire une factorisation de P_n en polynômes de degré 1.

EXERCICE 4

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0.$$

Montrer que $P = Q = 0$.