CORRECTION DU DEVOIR MAISON 9

EXERCICE 1

Un grand classique : polynômes de Tchebycheff

On considère la suite des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1. On a

$$\begin{array}{ll} P_2 & = 2XP_1 - P_0 = 2X \times X - 1 = 2X^2 - 1 \\ P_3 & = 2XP_2 - P_1 = 2X \times (2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X \\ P_4 & = 2XP_3 - P_2 = 2X \times (4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1 \end{array}$$

2. *Cette question se traite par récurrence. La difficulté consite à écrire une bonne propriété à démontrer (par soucis d'efficacité, cela requiert un peu d'expérience)*
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad \exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] : P_n = 2^{n-1}X^n + Q_n$$

- D'après le calcul de P_1 et P_2, les propositions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies
- Supposons que les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vérifiées pour un entier $n \geqslant 1$ (et prouvons $\mathcal{P}_{n+2}$). Nous remarquons alors que

$$\begin{array}{ll} P_{n+2} & = 2XP_{n+1} - P_n \\ & = 2X(2^nX^{n+1} + Q_{n+1}) - (2^{n-1}X^n + Q_n) \\ & = 2^{n+1}X^{n+2} + \underbrace{2XQ_{n+1} - 2^{n-1}X^n - Q_n}_{Q_{n+2}\in\mathbb{R}_{n+1}[X]} \end{array}$$

  Comme $\deg(Q_n) \leqslant n - 1$ et $\deg(Q_{n+1}) \leqslant n$, nous remarquons en effet que $Q_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et nous concluons que $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

   En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que P_n est de degré n pour $n \in \mathbb{N}$ (car $P_0 = 1$) et de coefficient dominant 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$ et de coeeficient dominant 1 pour $n = 0$.

3. *cela est encore plus vrai ici.* Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad P_n(-X) = (-1)^n P(X)$$

- D'après la donnée de P_0 et P_1, les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies
- Supposons que les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vérifiées pour un entier $n \geqslant 0$ (et prouvons $\mathcal{P}_{n+2}$). Nous remarquons alors que

$$\begin{array}{ll} P_{n+2}(-X) & = (2XP_{n+1} - P_n)(-X) \\ & = -2XP_{n+1}(-X) - P_n(-X) \\ & = -2X(-1)^{n+1}P_{n+1}(X) - (-1)^nP_n(X) \\ & = 2X(-1)^{n+2}P_{n+1}(X) - (-1)^n(-1)^2P_n(X) \\ & = (-1)^{n+2}\big(2XP_{n+1}(X) - P_n(X)\big) \\ & = (-1)^{n+2}P_{n+2}(X) \end{array}$$

  En particulier, $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que P_n a la même parité de n. Si n est pair, P_n est un polynôme pair (avec uniquement des termes de degré pair) et si n est pair, P_n est un polynôme impair (avec uniquement des termes de degré impair)

4. *Encore une fois, il faut procéder par récurrence à deux pas, car la définition de P_{n+2} à partir de P_{n+1} et P_n est la seule relation que l'on peut utiliser pour aboutir.* Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad P_n(cos(x)) = cos(nx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   - D'après la donnée de P_0 et P_1, les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies car

$$\begin{array}{ll} P_0\big(\cos(x)\big) & = 1 = \cos(0 \times x) \\ P_1\big(\cos(x)\big) & = \cos(x) = \cos(1 \times x) \end{array} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   - Supposons que les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vérifiées pour un entier $n \geqslant 0$ (et prouvons $\mathcal{P}_{n+2}$). Pour $x \in \mathbb{R}$, nous remarquons alors que

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos x) &= (2\cos(x) P_{n+1}(\cos x) - P_n(\cos x) \\ &= (2\cos(x)\cos\big((n+1)x\big) - \cos(nx) \end{aligned}$$

     Or, il résulte de la formule trigonométrique d'addition des angles que

$$\begin{aligned} \cos\big((n+2)x\big) &= \big((n+1)x + x\big) &&= \cos(x)\cos\big((n+1)x\big) - \sin(x)\sin\big((n+1)x\big) \\ \cos\big(nx\big) &= \big((n+1)x - x\big) &&= \cos(-x)\cos\big((n+1)x\big) - \sin(-x)\sin\big((n+1)x\big) \\ & &&= \cos(x)\cos\big((n+1)x\big) + \sin(x)\sin\big((n+1)x\big) \end{aligned}$$

     A fortiori, nous remarquons d'une part que $\cos(nx) + \cos\big((n+2)x\big) = 2cos(x)\cos\big((n+1)x\big)$ et d'autre part que

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos x) &= (2\cos(x)\cos\big((n+1)x\big) - \cos(nx) = \cos(nx) + \cos\big((n+2)x\big) - \cos(nx) \\ &= \cos\big((n+2)x\big) \end{aligned}$$

     En particulier, la proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

   En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

5. *Maintenant, grace à l'identité établie à la question précédente, nous pouvons procéder autrement que par récurrence.* Pour $n \geqslant 2$, commençons par trouver toutes les racines de P_n de la forme $z = \cos(x)$

$$\begin{aligned} P_n(\cos x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \cos(nx) = 0 \Longleftrightarrow \cos(nx) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow nx \equiv \tfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ &\Longleftrightarrow x \equiv \tfrac{\pi}{2n} \quad \left[\tfrac{\pi}{n}\right] \end{aligned}$$

   En particulier, nous venons de trouver n racines distinctes de P_n, les nombres de la forme

$$\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}) \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1)$$

   (Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0{,}2\pi]$ et comme les $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ forment une suite strictement croissante de n nombres de cet intervalle, nous avons bien n racines distinctes de P_n, qui est de degré n. Nous avons donc bien trouvé toutes les racines de P_n. De plus, comme P_n est de coefficient dominant 2^{n-1}, nous pouvons également décomposer P_n pour écrire que

$$P_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right)$$

Voici une troisième relation fondamentale à propose des polynômes de Tchebycheff de première espèce

EXERCICE 2

Un autre classique : polynômes de Lagrange

1. D'après les relations $P(1) = 0$, $P(2 = 0$ et $P(3) = 0$, les nombres 1, 2 et 3 sont les trois racines du polynôme P, qui est de degré 3. Il résulte de l'unique décomposition de P en facteurs, qu'il existe une unique constante $\alpha \in \mathbb{R}^*$ telle que

$$P = \alpha(X-1)(X-2)(X-3)$$

En substituant 4 à X, il résulte alors de la relation $P(4) = 1$ que

$$P(4) = \alpha(4-1)(4-2)(4-3) = 6\alpha$$

En particulier $\alpha = \frac{1}{6}$ de sorte que

$$P = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{6}$$

nous avons fait une démonstration directe, sans analyse-synthèse (quand on sait comment procéder, pas besoin d'enqueter/de tatonner).

2. Cas général : soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels distincts deux à deux.
   a. Traitons les deux questions en une seule fois. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Le polynôme L_n est de degré n et admet n racines distinctes dans $[\![0,n]\!] \setminus \{k\}$ d'après les relations

$$L_k(a_j) = 0 \qquad (j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\})$$

   A fortiori, il existe un unique nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$L_k = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (X-j)$$

   Et il résulte alors de la relation $L_k(k) = 1$ que

$$1 = L_k(k) = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (k-j)$$

   De sorte que $\alpha = 1/\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (k-j)$. En particulier, nous obtenons que

$$L_k = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (X-j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (k-j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X-j}{k-j}$$

Quel est l'intérêt des polynômes de Lagrange ?
les polynômes $L_0, \cdots, L_n$ constituent une base de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est particulièrement utile pour résoudre la problème suivant :
Comment trouver un polynôme P de degré n vérifiant $P(k) = \alpha_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les nombres α_k étant arbitrairement choisis...
Il suffit de prendre

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$$

Par un procédé identique, on peut fabriquer aisément une fonction polynômiale qui passe par $n+1$ points quelconques du plan (d'abscisses distinctes 2 à 2, au lieu de $[\![0,n]\!]$)

EXERCICE 3

Remarquez le léger changement d'énoncé (avec un décalage d'indice de 1) Soit la suite de polynômes (P_n) définie par : $P_1 = 1$ et

$$P_{n+1} = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+j) \qquad (n \geqslant 1)$$

1. On a $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2} = \frac{X^2+3X+2}{2} = \frac{(X+1)(X+2)}{2}$
2. Pour $n \geqslant 2$, Prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad P_n = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{j=1}^{n-1} (X+j)$$

- La proposition $\mathcal{P}_2$ est vraie car $P_2 = 1 + X = \frac{1}{1!} \prod_{j=1}^{1} (X+j)$
- Supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geqslant 2$ (et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$). Alors, nous remarquons que

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+j) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+j) + \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (X+j) \\ &= P_n + \textstyle\frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (X+j) \\ &= \textstyle\frac{1}{(n-1)!} \prod_{j=1}^{n-1} (X+j) + \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (X+j) \\ &= n \times \textstyle\frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n-1} (X+j) + \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n-1} (X+j) \times X \\ &= (X+n) \times \textstyle\frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n-1} (X+j) \\ &= \textstyle\frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} (X+j) \end{aligned}$$

  En particulier, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \geqslant 2$

EXERCICE 4

En substituant $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ à x, nous déduisons de la 2π-périodicité des fonctions cosinus et sinus et des relations $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ que

$$Q\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

En particulier, le polynôme Q admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme $Q = 0$. De même, en substituant remarquons que $x = 2k\pi$ à x, nous obtebnons que le polynôme P admet une infinité de racines et donc également que $P = 0$.