DEVOIR SURVEILLE 2

Exo I. Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

A. 1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}f$ de la fonction f

2. Etudier les variations de la fonction f

3. Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1}$ pour $x \in \mathcal{D}f$ et donner la valeur de ces trois réels

4. Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

B. On définit une suite u en posant $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$

1. Démontrer que $f(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant 1$.

2. Montrer que $u_n \geqslant 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$

4. Etudier la monotonie de la suite u

C. On se propose d'exprimer u_n en fonction de n. Pour cela, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln(v_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que v_n et w_n sont définis pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que w est une suite géométrique

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n puis v_n en fonction de n et en déduire que

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

On rappelle que $a^b = \mathrm{e}^{\ln(a)b}$ *pour* $a > 0$ *et* $b \in \mathbb{R}$.

Exo II. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire que $u_{n+1} \geqslant 2u_n$.
2. Démontrer par récurrence que $u_{n+1} \geqslant 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exo III. Soit α un nombre réel strictement positif. On définit la suite u par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ 2u_{n+1} = 3u_n^2 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. alors, on pose $v_n = \ln u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite v est arithmético-géométrique
3. Déterminer une expression de v_n en fonction de n
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n
5. A quelle condition portant sur α, la suite u est-elle convergente ?

Exo IV. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$.

1. Étudier la fonction f : domaine de définition, limites, variations.
2. f est-elle injective de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$?
3. f est-elle surjective de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$?
4. On définit la restriction de f à $\mathbb{R}^+$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \frac{3x^2}{x+2} \end{array}$$

   Par la méthode de résolution d'équation, montrer que g définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer g^{-1}.
5. Retrouver le résultat sur la bijection g en utilisant le théorème de la bijection.

Exo V. On appelle f et g les deux fonctions sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

1. Etudier les variations de f et g sur $[0,+\infty[$
2. En déduire que $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$.
   On se propose d'étudier la suite u de nombres réels défini par :
$$u_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
3. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer par récurrence que pour chaque entier naturel $n \geqslant 1$:
$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$
5. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$. A l'aide du résultat de la question 2, prouver que
$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n$$
6. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
7. Etude de la convergence de la suite u
   a. Montrer que la suite u est strictement croissante
   b. En déduire que u est convergente. Soit ℓ sa limite.
   c. Montrer que $\frac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire un encadrement de ℓ.