

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 2

- Exo I.** A. 1. L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ (il n'est pas possible de diviser par 0)
2. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions dérivables et, de plus,

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} \quad \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$$

Comme $(2x-1)^2$ est strictement positif sur $\mathcal{D}f$, on remarque que f' est du signe de $x(x-1)$ dont on déduit le signe via un tableau de signe ou en remarquant que c'est un trinôme du second degré de racines 0 et 1. En particulier, $f'(x)$ est

- nul si $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 0$
- strictement positif si $x > \frac{1}{2}$ ou $x < 0$
- strictement négatif sinon

En conclusion, f est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$

conseil : rédiger avec un tableau de variation.

3. Procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que ces trois nombres réels existent. Alors,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} = a \quad c = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1)f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(0) = 0 = b - c = b - \frac{1}{4}$$

De sorte que nous venons de prouver que, nécessairement $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{1}{4}$. a , b et c sont uniques

Synthèse Montrons que ces valeurs que nous avons trouvées conviennent. Pour cela, il suffit de mettre sous le même dénominateur l'expression suivante pour remarquer que

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{2x-1} = \frac{(2x-1)\frac{x}{2} + \frac{2x-1}{4} + \frac{1}{4}}{2x-1} = \frac{2x^2}{2x-1} = f(x) \quad (x \in \mathcal{D}f)$$

*Cette démonstration a le mérite d'être rapide, efficace et d'illustrer le principe d'analyse-synthèse mais n'est pas du tout la réponse attendue des étudiants car j'ai « triché » au cours de l'analyse en utilisant **au brouillon** des connaissances qui ne sont pas au programme en ECS (la théorie de la décomposition en éléments simples) pour trouver rapidement les valeurs de a , b et c .*

J'imagine qu'un correcteur au concours en ECS s'attend à ce que les étudiants mettent $ax + b + \frac{x}{2x-1}$ sous le même dénominateur et identifie le résultat avec $f(x)$ avant de résoudre un système d'inconnues a , b et c . C'est bourrin et long mais cela marche très bien (on a existence, unicité et les valeurs attendues).

On peut également faire apparaître progressivement la forme attendue en procédant de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2x-1} &= \frac{2x \frac{x}{2}}{2x-1} = \frac{(2x-1) \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{2x-1} = \frac{x}{2} + \frac{\frac{2x}{4}}{2x-1} \\
&= \frac{x}{2} + \frac{\frac{2x}{4}}{2x-1} = \frac{x}{2} + \frac{\frac{2x-1}{4} + \frac{1}{4}}{2x-1} \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x-1}
\end{aligned}$$

Malheureusement, cette technique prouve l'existence de a , b et c et donne des valeurs qui conviennent **mais sans prouver leur unicité**.

Une question assez difficile donc, si elle ne vous plait pas, passez la ! Il y a des questions plus faciles et plus rapides à traiter ailleurs

4. La tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 2 est d'équation

$$T : y = f(2) + f'(2)(x - 2).$$

Comme $f(2) = 2/3$ et $f'(2) = \frac{4}{9}$ (d'après le calcul de $f'(x)$ effectué en A.2),

$$T : y = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}(x - 2)$$

- B. 1. On sait depuis A.2 que f est croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $f(1) = 1$, on en déduit que $f(x) \geq f(1) = 1$ pour $x \geq 1$

2. Prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_n$ défini et $u_n \geq 1$

- \mathcal{P}_0 est vraie car $u_0 = 2$
- Supposons \mathcal{P}_n pour un entier $n \geq 0$. Comme f est définie sur $[1, +\infty[$ et comme $u_n \geq 1$, nous remarquons que $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini et il résulte du résultat établi à la question précédente que $u_{n+1} \geq 1$. De sorte que \mathcal{P}_{n+1} est vraie

En conclusion, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour $x \in \mathcal{D}f$, nous remarquons que $2x - 1 \neq 0$ et dont que

$$f(x) = x \iff \frac{x^2}{2x-1} = x \iff x^2 = x(2x-1) \iff 0 = x^2 - x = x(x-1) \iff x \in \{0,1\}$$

4. Soit $n \geq 0$. Comme $u_n \geq 1$, nous remarquons que $2u_n - 1 > 0$ et nous déduisons d'une identité remarquable que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{(u_n)^2 - 2(u_n)^2 + 1}{2u_n - 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1} \geq 0$$

En particulier, la suite u est croissante.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \geq 1$, le quotient $v_n = \frac{u_n - 1}{v_n}$ est défini et positif ou nul. En fait, ce nombre ne peut pas être nul, car pour cela, il faudrait que $u_n = 1$, ce qui n'est pas possible car u_n est croissante et $u_0 = 2$. *C'est un point un peu subtil, ils abusent un peu dans ce sujet, ils auraient pu nous demander de démontrer que $u_n > 1$ à la question B2, cela aurait rendu les choses un peu plus simples* De sorte que le logarithme $w_n = \ln(v_n)$ est lui aussi défini.
- b. *Stratégie : pour prouver que w est géométrique, essayons d'exprimer w_{n+1} en fonction de w_n et d'une raison à déterminer. Il est également possible de calculer $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ mais cela donne en général le double de calculs* Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, nous déduisons d'une identité remarquable (encore !)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{f(u_n)-1}{f(u_n)} = 1 - \frac{1}{f(u_n)} = 1 - \frac{2u_n-1}{(u_n)^2} \\ &= \frac{(u_n)^2-2u_n+1}{(u_n)^2} = \frac{(u_n-1)^2}{(u_n)^2} = \left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2 = (v_n)^2 \end{aligned}$$

En reportant ceci dans un logarithme, il vient alors

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln((v_n)^2) = 2 \ln(v_n) = 2w_n$$

La suite w est donc une suite géométrique de raison 2. *Question difficile*

- c. D'après le cours, il suit $w_n = w_0 2^n$ pour $n \geq 0$. En composant la formule $w_n = \ln(v_n)$ avec une exponentielle, nous aboutissons à

$$v_n = e^{w_n} = e^{w_0 2^n} \quad (n \geq 0)$$

Comme $w_0 = \ln(v_0)$ et comme $v_0 = (u_0 - 1)/u_0 = \frac{1}{2}$, nous obtenons que $w_0 = -\ln 2$ puis que

$$v_n = e^{w_n} = e^{-\ln(2)2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \quad (n \geq 0)$$

comme $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$, nous remarquons d'abord que $v_n u_n = u_n - 1$ puis que $u_n(v_n - 1) = -1$, de sorte que

$$u_n = \frac{1}{1 - v_n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

Exo II. 1. En simplifiant les factorielles, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 \\ &= (2n+2)(2n+1) \times \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2 \underbrace{\frac{(2n+1)}{n+1}}_{\geq 1} \geq 2 \end{aligned}$$

En multipliant par $u_n > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas et nous obtenons que $u_{n+1} \geq 2u_n$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_{n+1} \geq 2^n$.

- \mathcal{P}_0 est vraie car $u_0 = \binom{0}{0} = 1 \geq 1 = 2^0$
- Supposons maintenant \mathcal{P}_n pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons \mathcal{P}_{n+1} .

$$u_{n+1} \underbrace{\geq}_{Q1} 2u_n \underbrace{\geq}_{\mathcal{P}_n} 2 \times 2^n = 2^{2n+1}$$

A fortiori \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

En conclusion, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, il résulte de l'inégalité montrée à la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exo III. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_n > 0$.

- Comme $u_0 = \alpha > 0$, la propriété P_0 est vraie
- Supposons maintenant \mathcal{P}_n pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons \mathcal{P}_{n+1} .

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{définition}} \frac{3}{2} u_n^2 \underbrace{> 0}_{\mathcal{P}_n}$$

A fortiori \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

En conclusion, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$.

2. *Stratégie : pour prouver que la suite est arithmético géométrique, il semble logique de calculer v_{n+1} et de chercher à l'exprimer sous la forme $av_n + b$*

Par définition de la suite v et de la suite u , nous avons

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln \left(\frac{3}{2} u_n^2 \right) = \ln \frac{3}{2} + 2 \ln u_n = \ln 3 - \ln 2 + 2v_n$$

A fortiori, v_n est arithmético-géométrique (avec $a = 2$ et $b = \ln 3 - \ln 2$).

3. Cherchons d'abord l'unique suite constante c vérifiant $c = ac + b$, c'est à dire

$$c = \ln 3 - \ln 2 + 2c \iff c = \ln 2 - \ln 3$$

En procédant à une soustraction, avec la relation $v_{n+1} = av_n + b$, il vient

$$v_{n+1} - c = 2(v_n - c)$$

En particulier la suite $v_n - c$ est géométrique de raison 2, de sorte que

$$v_n - c = (v_0 - c) \times 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Comme $v_0 = \ln \alpha$, nous obtenons alors que $v_n = \ln 2 - \ln 3 + (\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n$

4. Comme $u_n = e^{v_n}$, il suit

$$u_n = e^{\ln 2 - \ln 3 + (\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n} = e^{\ln 2} e^{-\ln 3} e^{(\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n} = \frac{2}{3} e^{(\alpha - \ln 2 + \ln 3) \times 2^n}$$

5. La suite u converge ssi $\alpha - \ln 2 + \ln 3 \leq 0$. Plus précisément,
 - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 < 0$, v_n diverge vers $-\infty$ et u_n converge vers 0 par composition avec l'exponentielle
 - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 = 0$, v_n et u_n sont des suites constantes (et donc convergentes), égales respectivement à $\ln 2 - \ln 3$ et $\frac{2}{3}$
 - Si $\alpha - \ln 2 + \ln 3 > 0$, v_n diverge vers $+\infty$ et u_n diverge vers $+\infty$ par composition avec l'exponentielle

Exo IV. 1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sa dérivée, qui vaut

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x}{(x+2)^2} = 3x \frac{x+4}{(x+2)^2},$$

est du signe de $x(x+4)$. Par ailleurs, un calcul rapide montre que $f \xrightarrow{-\infty} -\infty$, $f \xrightarrow{-2^-} -\infty$, $f \xrightarrow{-2^+} +\infty$ et $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$. En particulier, la tableau de variation de la fonction f est

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		12		$+\infty$		$+\infty$
		\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow	
	$-\infty$		$-\infty$	0		

- Il résulte du tableau de variation (et du théorème des valeurs intermédiaires) que l'équation $f(x) = 1$ a deux antécédents : l'un dans $] - 2, 0[$ et l'autre dans $]0, +\infty[$. A fortiori, f n'est pas injective sur $] - 2, +\infty[$.
- De même, il résulte du tableau de variation que $f(] - 2, +\infty[) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$. A fortiori, f n'est pas une surjection de $] - 2, +\infty[$ sur \mathbb{R}^+ .
- Etant donné $y \in \mathbb{R}^+$, nous remarquons d'une part que $y - \sqrt{24y + y^2} < 0$ et d'autre part qu'un nombre positif x satisfait

$$\begin{aligned}
y = g(x) &\iff y = \frac{3x^2}{x+2} \iff 3x^2 = y(x+2) \iff x^2 - \frac{y}{3}x - \frac{2y}{3} = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{y}{6}\right)^2 x - \frac{24y+y^2}{6^2} = 0 \iff \left(x - \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6}\right) \left(x - \frac{y-\sqrt{24y+y^2}}{6}\right) = 0 \\
&\iff x = \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6} \geq 0
\end{aligned}$$

En particulier, l'équation $y = g(x)$ admet une unique solution $x \geq 0$ de sorte que g est une bijection. De plus, sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned}
g^{-1} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\
y &\mapsto \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6}
\end{aligned}$$

- D'après le tableau de variation de f , la fonction g est strictement croissante (et donc injective) et satisfait $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. A fortiori, g est bijective.

Exo V. 1. *Conseil : traiter cette question en dressant un tableau de variation de f et de g*
Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, les fonctions polynômes $x \mapsto -x + \frac{x^2}{2}$, $x \mapsto 1 + x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables. Comme $1 + x > 0$ et comme le logarithme est dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ est également dérivable sur $[0, +\infty[$. A fortiori, les fonctions f et g sont dérivables sur $[0, +\infty[$ en tant que sommes de fonctions dérivables. De plus

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x} < 0 \\
g'(x) &= x + f'(x) = \frac{x(1+x)-x}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad (x \geq 0)
\end{aligned}$$

A fortiori, f et g sont respectivement décroissantes et croissantes sur $[0, +\infty[$.

- Comme $f(0) = 0$ et comme f est décroissante sur \mathbb{R}^+ , on a $f(x) \leq 0$ ($x \geq 0$), c'est-à-dire

$$\ln(1+x) \leq x \quad (x \geq 0)$$

De même, comme $g(0) = 0$ et g est croissante sur \mathbb{R}^+ , on a $g(x) \geq 0$ ($x \geq 0$) et donc

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \quad (x \geq 0)$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_n > 0$

- \mathcal{P}_1 est vraie car $u_1 = \frac{3}{2} > 0$
- Supposons maintenant \mathcal{P}_n pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons \mathcal{P}_{n+1} .

$$u_{n+1} \underbrace{\geq}_{\text{définition}} u_n \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{>0} \underbrace{>}_{\mathcal{P}_n} 0$$

A fortiori \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

4. *Soupir... encore une démonstration par récurrence = des points donnés gratuitement (enfin, pour ceux qui ont pris la peine de comprendre et de maîtriser le concept facile de démonstration par récurrence. Pour info, il y a souvent des questions qui se traitent par récurrence en ds/concours)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : \ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

- \mathcal{P}_1 est vraie car $\ln u_1 = \ln \left(\frac{3}{2}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^1 \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
- Supposons maintenant \mathcal{P}_n pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons \mathcal{P}_{n+1} .
Comme $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, on a

$$\begin{aligned} \ln u_{n+1} &\underbrace{=}_{\text{définition}} \ln \left(u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = \ln u_n + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &\underbrace{=}_{\mathcal{P}_n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

A fortiori \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

5. D'après l'inégalité établie à la question 2 pour $k \in \mathbb{N}$ et $x = \frac{1}{2^k}$, nous avons

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k} \quad (k \geq 0)$$

Soit $n \geq 1$. En sommant la relation précédente pour $0 \leq k \leq n$, il vient

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2\right) \leq \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$$

A fortiori, nous obtenons que

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}}_{S_n} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k}}_{T_n} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\ln u_n} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}}_{S_n}$$

6. S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$, de sorte que

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 1)$$

De même T_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4} \neq 1$, de sorte que

$$T_n = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \quad (n \geq 1)$$

Il résulte de ces deux formules que S_n converge vers 1 et que T_n converge vers $\frac{1}{3}$

7. a. Nous avons précédemment montré que $u_n > 0$ pour $n \geq 1$. Comme

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > u_n \times 1 = u_n,$$

nous concluons que la suite u est strictement croissante

- b. La suite S_n est majorée car elle converge. Comme $\ln u_n \leq S_n$, la suite $\ln u_n$ est majorée et nous en déduisons qu'il en est de même pour la suite u_n par composition avec la fonction exponentielle, qui est croissante. Comme la suite u est strictement croissante, elle est alors forcément convergente.
- c. Comme $\lim S_n = 1$, $\lim T_n = \frac{1}{3}$ et $\lim u_n = \ell$, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, nous déduisons de $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$ que

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leq \ln \ell \leq 1$$

En composant avec l'exponentielle, il vient alors $e^{5/6} \leq \ell \leq e$.