# DEVOIR SURVEILLE 3

**Exo A.** *Les flèches (optionnelles) sont utilisées pour aider les étudiants à distinguer les vecteurs, dans cet exercice mélangeant suites et espaces vectoriels*
On considère l'ensemble de suites suivant :

$$E = \{\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, 8u_{n+3} - 12u_{n+2} + 6u_{n+1} - u_n = 0\}$$

Soient $\vec{i} = (i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\vec{j} = (j_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\vec{k} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{aligned} i_n &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n & (n \in \mathbb{N}) \\ j_n &= n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n & (n \in \mathbb{N}) \\ k_n &= n^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n & (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

1. Prouver que $E$ forme un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles
2. a. Prouver que $\vec{i} \in E$, que $\vec{j} \in E$ et que $\vec{k} \in E$ (sur 6 points)
   b. Prouver que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une famille libre de $E$
3. Soit $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$. On définit une suite $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

   $$w_k = 2^{k+1}u_{k+1} - 2^k u_k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

   a. On admet qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$w_k = \lambda + \mu k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer de deux manière la somme $S_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k$.
   b. En déduire que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des suites $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
4. A l'aide de ce qui précède, déterminer une base de $E$.
5. **On va démontrer ici le résultat admis au 3a).**
   On considère une suite $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ et on pose $\vec{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

   $$w_k = 2^{k+1}u_{k+1} - 2^k u_k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

   a. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}, w_{k+2} - 2w_{k+1} + w_k = 0$
   b. En déduire l'expression de $w_k$ en fonction de $k$ admise au 3a)
6. On pose $F = \{\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E : u_0 - 2u_1 = 0\}$
   a. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$
   b. Montrer que $\vec{i} \in F$.
   c. Soit $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Justifier que $\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

   $$u_n = \alpha i_n + \beta j_n + \gamma k_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   puis montrer que $\gamma = -\beta$.
   d. En déduire une base de $F$

**Exo B.** Un site internet demande de choisir un mot de passe de 8 caractères parmi les 26 lettres minuscules de l'alphabet, les 10 chiffres et 6 signes de ponctuation (,;!.:?).

1. Combien y a-t-il de mots de passe possibles ?
2. Combien y a-t-il de mots de passe possibles commençant par 5 minuscules et se terminant par un nombre avec 3 chiffres distincts
3. Combien y a-t-il de mots de passe possibles avec au moins un chiffre ou un signe de ponctuation ?
4. Combien y a t-il de mots de passe avec au moins deux signes de ponctuation ?
5. Combien y a t-il de mots de passe avec exactement trois chiffres et un signe de ponctuation
6. Combien y a-t'il de mots de passe constitués uniquement de 8 chiffres distincts placés dans l'ordre croissant

**Exo C.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère trois urnes : l'urne n° 1 contient deux boules rouges et trois boules bleues, l'urne n° 2 contient une boule rouge et aucune boule bleue et l'urne n° 3 contient une boule bleue et aucune boule rouge. On choisit d'abord une de ces trois urnes au hasard avec équiprobabilité. Une fois cette urne choisie, on effectue dans cette urne et sans jamais en changer un nombre fini de n de tirages successifs d'une boule, avec remise dans cette urne. Lorsque l'urne a été choisie, les tirages sont considérés comme indépendants. Pour $i \in \{1,2,3\}$ on note $U_i$ l'événement « l'urne choisie pour les tirages est l'urne n° $i$ ». Pour tout entier naturel non nul $k$, on note $R_k$ l'événement « le $k^{\text{ième}}$ tirage a amené une boule rouge ».

A. 1. Donner les probabilités conditionnelles $P_{U_1}(R_k)$, $P_{U_2}(R_k)$, $P_{U_3}(R_k)$ et en déduire que $P(R_k) = \frac{7}{15}$.

2. a. Justifier que $P_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

   b. Préciser les valeurs de $P_{U_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$ et $P_{U_3}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$.

   c. En déduire que $P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$

3. Montrer que les événements $R_1$ et $R_2$ ne sont pas indépendants pour la probabilité $P$

B. 1. Pour $2 \leqslant k \leqslant n$, montrer que

$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^k}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}$$

2. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note $A_k$ l'événement « une boule bleue apparaît pour la première fois au tirage n° $k$ » et $A$ l'événement « aucune boule bleue n'apparaît jamais lors des $n$ tirages ».

   a. Calculer $P(A_1)$

   b. Soit $k \geqslant 2$. Exprimer $A_k$ en fonction des événements $R_k$.
   En déduire, avec les questions précédentes, pour $k \geqslant 2$, la valeur de $P(Ak)$ en fonction de $k$.

   c. Calculer la probabilité $P(A)$.

**Exo D.** On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. a. Etudier les variations de $g$
   b. Pour $n \geqslant 2$, prouver que l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution strictement positive, que l'on notera $\beta_n$, et une unique solution strictement négative, que l'on notera $\alpha_n$.
2. a. Pour $n \geqslant 2$, montrer que $1 \leqslant g(\ln n) \leqslant n$.
   b. Pour $n \geqslant 2$, montrer que $g(\ln(2n)) = n + g(\ln(n)) - \ln 2$ puis que
   $$g(\ln(2n)) \geqslant n$$
   c. Pour $n \geqslant 2$, en déduire que $\ln(n) \leqslant \beta_n \leqslant \ln(2n)$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$.
   d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\beta_n}{\ln(n)}$
3. **Dans cette question, on cherche une valeur approchée de $\alpha_2$.**
   On considère la suite $u$ définie par $u_0 = -1$ et
   $$u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
   a. Calculer $g(-2)$ et $g(-1)$. En déduire que $\alpha_2 \in ]-2, -1[$
   b. Montrer que $\alpha_2 \leqslant u_k \leqslant -1$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   c. On pose $\forall t \in [\alpha_2, -1]$, $h(t) = \mathrm{e}^t - 2$. Montrer que
   $$h(x) - \alpha_2 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \alpha_2) \qquad (\alpha_2 \leqslant x \leqslant -1)$$
   d. En déduire que $0 \leqslant u_{k+1} - \alpha_2 \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}(u_k - \alpha_2)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   e. Montrer que $0 \leqslant u_k - \alpha_2 \leqslant \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$
   f. En déduire que la suite $u$ converge et préciser sa limite.