DEVOIR SURVEILLE 4

Exo A. **(extrait ECRICOM)**

On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0 et I_1
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour $n \in \mathbb{N}$
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Prouver que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
6. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Prouver que $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
8. Déterminer la limite de la suite u définie par $u_n = (n+1)I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
9. En déduire la limite de la suite v définie par $v_n = (n+2)\big(1-(n+1)I_n\big) \quad (n \in \mathbb{N})$

Exo B. On considère la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la parité de la fonction g.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$, puis calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. a. Pour $x > 1$, établir que $x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$.
   b. En déduire l'existence de la limite de g en $+\infty$ ainsi que sa valeur.
   c. Dresser le tableau de variation de g. On précisera $g(0)$ ainsi que les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

Exo C. On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. *(6 points)* Montrer que $V = \big\{(a+2b, 2a+2b+2c, 2a+b+3c, a+b+c) : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
2. Soit $W = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-2z+t = 0, 2y-3z+2t = 0 \text{ et } 3x-y-t = 0\big\}$. *(6 points)* Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base $(\vec{w}_3, \vec{w}_4)$.
3. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
4. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$.
5. On considère les vecteurs $\vec{f}_1 = (1,0,-1,0)$, $\vec{f}_2 = (0,-1,0,1)$ et $\vec{f}_3 = (1,1,1,1)$. Montrer que la famille $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ constitue une base de F
6. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{e}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Déterminer la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exo D. **(d'après ESCP)** Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$.

1. *Votre succès en dépend !* Pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $A(s)A(t) = A(u)$ avec u nombre réel dont on déterminera une expression en fonction de s et t.
2. On s'interesse aux matrices inversibles de l'ensemble $\mathcal{M} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$
   a. La matrice $Q = A\left(\frac{1}{2}\right)$ est-elle inversible ? (justifier soigneusement)
   b. Montrer que la matrice I_3 appartient à $\mathcal{M}$.
   c. Pour $t \neq \frac{1}{2}$, montrer que la matrice $A(t)$ est inversible, donner son inverse et vérifier qu'il appartient à $\mathcal{M}$.
3. Déterminer les matrices S de $\mathcal{M}$ solutions de l'équation $S^2 = A\left(\frac{-3}{2}\right)$.
4. On rappelle que $J^0 = I_3$ par convention et l'on pose $J = A(-1)$.
   a. Montrer qu'il existe une unique suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que
   $$A(t_n) = J^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
   b. Déterminer une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   c. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice J^n en la représentant avec ses coefficients.

Exo E. **(d'après ESCP)** Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule. Si le numéro k de la boule tirée est 1, on arrête les tirages, sinon, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k et on effectue un nouveau tirage. On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule 1 et on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués jusqu'à l'obtention de la boule 1.

A. **Premiers exemples**
   a. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
   b. Déterminer la loi de X_2, son espérance et sa variance.
   c. Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

B. **Cas général** Soit N_1 la variable égale au numéro de la première boule tirée.
   a. a. Quelle est la loi de N_1 ? Rappeler son espérance et sa variance.
      b. Déterminer $X_n(\Omega)$ et $P(X_n = 1)$.
      c. Déterminer $P(X_n = n)$.
   b. a. Sachant que $N_1 = 1$, que vaut X_n ?
      b. Pour $2 \leqslant k \leqslant n$ et $2 \leqslant j \leqslant n$, justifier que
      $$P_{N_1=j}(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > j \\ P(X_{j-1} = k-1) & \text{si } k \leqslant j \end{cases}$$
      c. Montrer alors, à l'aide de la formule des probabilités totales, que
      $$P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=k-1}^{n-1} P(X_j = k-1) \qquad (2 \leqslant k \leqslant n) \tag{1}$$
      d. Expliciter $P(X_n = 2)$ sans chercher à calculer la somme obtenue.
      e. On pose $v_n = n!P(X_n = n-1)$ pour $n \geqslant 2$.
         - A l'aide de la relation (1), montrer que $v_{n+1} = v_n + n$ pour $n \geqslant 2$.
         - En déduire une expression explicite de v_n puis de $P(X_n = n-1)$.