CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 4

Exo A. 1. Un simple calcul de primitive donne

$$I_0 = \int_0^1 (1-x)^0 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2}$$

Par ailleurs, en procédant à une intégration par partie, les fonctions $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \left[(1-x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

2. Pour $n \geqslant 0$, nous déduisons de la linéarité et de la positivité de l'intégrale que

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-x)^{n+1}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x - \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left((1-x)^{n+1} - (1-x)^n\right)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1-x)^n \underbrace{((1-x)-1)}_{-x\leqslant 0}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \leqslant 0. \end{aligned}$$

En effet, l'application $x \mapsto -(1-x)^n x\mathrm{e}^{-2x}$ est négative (et continue) sur l'intervalle $[0,1]$. En particulier, la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $x \mapsto (1-x)^n\mathrm{e}^{-2x}$ est une fonction positive (et continue), il résulte de la positivité de l'intégrale que

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \geqslant 0$$

4. Comme la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0, elle admet une limite ℓ, qui vérifie nécéssairement $\ell \geqslant 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, nous déduisons de l'inégalité $0 \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$ que

$$0 \leqslant (1-x)^n\mathrm{e}^{-2x} \leqslant (1-x)^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

A fortiori, il résulte de la croissance de l'intégrale que

$$0 = \int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant I_n = \int_0^1 (1-x)^n x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (1-x)^n\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

6. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 = \lim_{n\to+\infty}$, il résulte de l'inégalité précédente et du principe des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

7. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et procédons à une intégration par partie. Comme les applications $x \mapsto -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ et $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \mathrm{e}^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} (-2) \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 (1-x)^{n+1} \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+1} \end{aligned}$$

En multipliant par $n+1$, nous obtenons alors que $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n - 1$.

8. Il résulte de l'égalité obtenue précément que $u_n = (n+1)I_n = 1 - 2I_{n+1}$. Comme il a été établi à la question 5) que la suite I_n converge vers 0, nous remarquons d'une part que $\lim_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$ et d'autre part que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

9. De même, nous remarquons que

$$v_n = (n+2)(1 - (n+1)I_n) = (n+2) \times 2I_{n+1} = 2(n+2)I_{n+1} = 2u_{n+1}$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, la suite u converge vers 1 de sorte que $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = 1$ et par suite $\lim_{n \to +\infty} v_n = 2$.

Exo B.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur le segment d'extrémités x et $2x$. A fortiori, l'intégrale $g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ (et donc $g(x)$) est bien définie. En conclusion, $\mathcal{D}g = \mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En procédant au changement de variable $t = -u$, appliqué
   - à la fonction $u \mapsto -u$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ du segment d'extrémités x et $2x$ dans lui même
   - à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, qui est continue sur le segment d'extrémités x et $2x$

   Nous obtenons que

$$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-u^2} (-1) \mathrm{d}u = -\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = -g(x)$$

En particulier, la fonction g est impaire.

3. L'application F dédinie par $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ est l'unique primitive sur $\mathbb{R}$, s'annulant en 0, de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. Or, la relation de Chasles induit que

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{2x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t + \int_x^0 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = F(2x) - F(x) \end{aligned}$$

Comme les applications F et $x \mapsto 2x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, leur composée $x \mapsto F(2x)$ l'est également et la somme $x \mapsto F(2x) - F(x) = g(x)$ l'est aussi. A fortiori, l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et nous remarquons que

$$g'(x) = \big(F(2x) - F(x)\big)' = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\mathrm{e}^{-(2x)^2} - \mathrm{e}^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

4.

a. Soit $x > 1$. Par composition avec l'exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, et l'application $t \mapsto -t^2$ décroissante sur $[1, +\infty[)$, l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et donc sur $[x,2x]$ pour $x > 1$. De sorte que

$$\mathrm{e}^{-(2x)^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \qquad (x \leqslant t \leqslant 2x).$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[x,2x]$, il résulte alors de la croissance de l'intégrale que

$$x\mathrm{e}^{-4x^2} = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-(2x)^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{-x^2} \qquad (x \leqslant t \leqslant 2x).$$

On peut accelerer le calcul en se rappelant que $\int_a^b c\mathrm{d}t = (b-a)c$: l'intégrale d'une constante sur un segment est égale à la constante multiplié par la longueur (orientée) du segment

b. D'après le théorème de croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2\mathrm{e}^{-4x^2}}{-4x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2\mathrm{e}^{-x^2}}{-x} = 0$$

Il résulte alors du principe des gendarmes et de l'inégalité prouvée à la question précédente que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

c. D'après la question 3), La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{-(2x)^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2} \times \left(2\mathrm{e}^{-x^2} - 1\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

En particulier, $g'(x)$ s'annule ssi $2 = \mathrm{e}^{x^2}$, c'est à dire ssi $x = \pm\sqrt{\ln(2)}$. On remarque également que $g'(x) < 0$ ssi $-\sqrt{\ln(2)} < x < \sqrt{\ln(2)}$ C'est compliqué de dactylographier un tableau de variation donc je ne le fais pas, mais je vais décrire le résultat attendu. Posons $a = -\sqrt{\ln(2)}$ et $b = \sqrt{\ln(2)}$

- Sur l'intervalle $]-\infty, a]$, la fonction g est strictement croissante
- Sur l'intervalle $[a,b]$, la fonction g est strictement décroissante
- Sur l'intervalle $[b, +\infty[$, la fonction g est strictement croissante
- Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on a $g(0) = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ par imparité.

En a et en b, on n'a pas réellement de valeurs simples pour $g(a)$ et $g(b)$, donc on les laisse comme cela.

Exo C. 1. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(a+2b, 2a+2b+2c, 2a+b+3c, a+b+c) = a(1,2,2,1) + b(2,2,1,1) + c(0,2,3,1)$$

De sorte que, la définition de V se traduit par $V = \mathrm{Vect}\big((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1)\big)$
En particulier, V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Et la famille $\big((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1)\big)$ est génératrice de V. Malheureusement, elle n'est pas libre (son rang vaut 2) car

$$(0,2,3,1) = 2(1,2,2,1) - (2,2,1,1)$$

Donc ce n'est pas une base de V mais grace à l'identité précédente, on remarque d'une part que $V = \text{Vect}\big((1{,}2{,}2{,}1),(2{,}2{,}1{,}1)\big)$ (le vecteur (0,2,3,1) pouvant être obtenu à partir des deux autres) et donc que la famille $\big((1{,}2{,}2{,}1),(2{,}2{,}1{,}1)\big)$ est génératrice de V et d'autre part que c'est une famille libre (son rang vaut 2), en tant que famille de deux vecteurs non-colinéaires. En conclusion la famille $\big((1{,}2{,}2{,}1),(2{,}2{,}1{,}1)\big)$ est une base de V.

2. Commençon par remarquer que

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in W \quad &\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} \boxed{\text{x}} & +y & -2z & +t & =0 \\ & 2y & -3z & +2t & =0 \\ 3x & -y & & -t & =0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} \boxed{\text{x}} & +y & -2z & +t & =0 \\ & \boxed{\text{2y}} & -3z & +2t & =0 \\ & -4y & +6z & -4t & =0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} \boxed{\text{2x}} & & -z & & =0 \\ & \boxed{\text{2y}} & -3z & +2t & =0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{r} 2x = z \\ 2y = 3z - 2t \end{array}\right. \\
&\iff (x,y,z,t) = \left(\tfrac{z}{2}, \tfrac{3z-2t}{2}, z, t\right) \\
&\iff (x,y,z,t) = z\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 1, 0\right) + t(0,-1,0,1) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \text{Vect}\left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 1, 0\right), (0,-1,0,1)\right) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \text{Vect}\big((1{,}3{,}2{,}0), (0,-1,0,1)\big)
\end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que $W = \text{Vect}\big((1{,}3{,}2{,}0),(0,-1,0,1)\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, dont une base est $\big((1{,}3{,}2{,}0),(0,-1,0,1)\big)$, car c'est une famille génératrice de W, libre car son rang vaut 2 (ou alors parce que ce sont deux vecteurs non colinéaires).

3. D'après les calculs effectués dans les deux questions précédentes, nous avons obtenus $\vec{v}_1 = (1{,}2{,}2{,}1)$, $\vec{v}_2 = (2{,}2{,}1{,}1)$, $\vec{w}_3 = (1{,}3{,}2{,}0)$ et $\vec{w}_4 = (0,-1,0,1)$. La famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$ est libre *ssi* $\text{rg}(\mathcal{F}) = 4$ (car elle comporte 4 vecteurs) et elle est génértrice de $\mathbb{R}^4$ *ssi* $\text{rg}(\mathcal{F}) = 4$ (car il y a 4 vecteurs dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$) de $\mathbb{R}^4$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathcal{F}) &= \mathrm{rg}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{w}_3,\vec{w}_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \left\{ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \right. \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4 \end{cases} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{cases} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-4}} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \left\{ L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{4}{3}L_2 \right. \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3
\end{aligned}
$$

A fortiori, la famille $\mathcal{F}$ est ni libre, ni génératrice de $\mathbb{R}^4$. *Remarque : La plupart des étudiants auront trouvé d'aures vecteurs* $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{w}_3,\vec{w}_4)$ *que ceux de ce corrigé mais leurs calculs se dérouleront de manière identique et les conclusions seront les mêmes*

4. Il résulte de la question précédente que la famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{w}_3,\vec{w}_4)$ n'est pas libre. En particulier, l'un de ces quatres vecteurs (au moins) n'est pas utile. Un autre calcul de rang donne

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\mathcal{F}) &= \operatorname{rg}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_4) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \left\{ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \right. \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4 \end{cases} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \cdots = 3
\end{aligned}$$

En particulier, la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_4)$ est libre. Comme La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$ est liée, nous en déduisons l'éxistence de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ tel que

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{w}_3 + d\vec{w}_4 = \vec{0}$$

Et comme la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_4)$ est libre, il est nécessaire que $c \neq 0$ de sorte que

$$\vec{w}_3 = \frac{-1}{c}(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + d\vec{w}_4)$$

En particulier, $\vec{w}_3$ peut être obtenu comme combinaison linéaire des autres vecteurs. A fortiori, on a

$$F = \operatorname{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4) = \operatorname{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_4)$$

En conclusion, la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_4)$ est génératrice de F. Et comme elle est libre, c'est une base de F.

5. Commençons par établir que $\vec{f}_1 \in F$, $\vec{f}_2 \in F$ et $\vec{f}_3 \in F$, d'après les relations

$$\begin{aligned}
\vec{f}_2 &= \vec{w}_4 \in F \\
\vec{f}_1 &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in F \\
\vec{f}_3 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{w}_4 \in F
\end{aligned}$$

En suite, un calcul de rang donne $\operatorname{rg}(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = 3$. Comme 3 est le nombre de vecteurs de cette famille, elle est libre. Comme 3 est le nombre de vecteurs dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_4)$ de F, trouvée précédemment, elle est aussi génératrice de F. En particulier, $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base de F.

6. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit de faire un calcul de rang et de montrer que $\operatorname{rg}(\mathcal{B}) = 4$.

7. On remarque que

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_4 = \vec{e}_4 \\
&\vec{e}_2 = \vec{e}_4 - \vec{f}_2 \\
&\vec{e}_3 = \tfrac{1}{2}\big((0,0,2,2) - (0,0,0,2)\big) = \tfrac{1}{2}(\vec{f}_3 - \vec{f}_1 + \vec{f}_2 - 2\vec{e}_4) \\
&\vec{e}_1 = \vec{f}_1 + \vec{e}_3 = \tfrac{1}{2}\left(\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 - 2\vec{e}_4\right)
\end{aligned}$$

A fortiori, nous remarquons que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Exo D. 1. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. En effectuant le produit matriciel, nous obtenons que

$$\begin{aligned} A(s)A(t) &= \begin{pmatrix} 1-s & -s & 0 \\ -s & 1-s & 0 \\ -s & s & 1-2s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-s)(1-t)+st & -t(1-s)-s(1-t) & 0 \\ -s(1-t)-t(1-s) & st+(1-t)(1-s) & 0 \\ -s(1-t)-st-t(1-2s) & st+s(1-t)+(1-2s)t & (1-2s)(1-2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-s-t+2st & -t-s+2st & 0 \\ -s-t+2st & 2st-t-s & 0 \\ -s-t+2st & s+t-2st & 1-2s-2t+4st \end{pmatrix} = A(\underbrace{s+t-2st}_{u}) \end{aligned}$$

En particulier, nous avons établi la relation très importante pour toute la suite

$$A(s)A(t) = A(s+t-2st) \qquad (s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$$

2. a. La troisième colonne de la matrice $Q = Q(\frac{1}{2})$ étant nulle, cette matrice ne peut être inversible (son rang étant inférieur à 2, il est différent de 3, sa taille)
   b. Comme $I_3 = A(0)$, la matrice I_3 appartient à l'ensemble $\mathcal{M} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$
   c. Soit $t \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ et soit $s = \frac{t}{2t-1}$ l'unique solution de l'équation $s+t-2ts = 0$ (elle existe car $2t-1 \neq 0$). Alors, il résulte de la relation fondamentale trouvée à la question 1 que

$$A(t)A(s) = A(s+t-2s) = A(0) = I_3$$

   Cette identité matricielle induit que la matrice $A(t)$ est inversible et que son inverse est la matrice $A(s) = A\left(\frac{t}{2t-1}\right) \in \mathcal{M}$

3. Soit $S = A(t)$ une matrice de $\mathcal{M}$. A l'aide de la relation trouvée à la question 1, nous remarquons que

$$\begin{aligned} S^2 = A\left(\tfrac{-3}{2}\right) &\iff A(t)^2 = A\left(\tfrac{-3}{2}\right) \iff A(2t-2t^2) = A\left(\tfrac{-3}{2}\right) \\ &\iff 2t-2t^2 = \tfrac{-3}{2} \iff t^2 - t - \tfrac{3}{4} = 0 \iff \left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \\ &\iff \left((t-\tfrac{3}{2}\right)\left(t+\tfrac{1}{2}\right) = 0 \iff t = \tfrac{3}{2} \text{ ou } t = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

   Les solutions de cette équation sont donc les matrices $A\left(\frac{3}{2}\right)$ et $A\left(-\frac{1}{2}\right)$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$(\mathcal{P}_n) : \exists! t_n \in \mathbb{R} : J^n = A(t_n)$$

   - $\mathcal{P}_0$ est vraie car $J^0 = I_3$ et $A(t) = I_3 \iff t = 0$ De sorte qu'il existe un unique nombre réel t_0 tel que $J^0 = A(t_0)$ (et nous remarquons de plus que $t_0 = 0$ cela servira plus tard)
   - Supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$. Nous déduisons de $\mathcal{P}_n$ et des relations $J = A(-1)$ et $A(s)A(t) = A(s+t-2ts)$ que

$$J^{n+1} = J \times J^n = J \times Q(t_n) = A(-1)A(t_n) = A(-1+t_n-2(-1)t_n) = A(3t_n-1)$$

Comme $A(t) = A(u) \iff t = u$ nous remarquons qu'il existe un unique nombre réel t_{n+1} tel que $J^{n+1} = A(t_{n+1})$ de sorte que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie (et nous remarquons de plus que $t_{n+1} = 3t_n - 1$, cela servira plus tard)

En conclusion ,la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. De sorte qu'il existe une unique suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que $J^n = A(t_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5. Il résulte des calculs effectués (et de l'unicité obtenue) dans la question précédente que

$$t_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad t_{n+1} = 3t_n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

6. La suite t est clairement arithmético-géométrique. Comme l'unique solution de l'équation caractéristique $x = 3x-1$ est $x = x = \frac{1}{2}$ et comme $t_{n+1}-c = 3(t_n-c)$ (par soustraction), la suite $t_n - c$ est géométrique, de raison 3 de premier terme $t_0 - c = -c = -\frac{1}{2}$. En particulier, nous obtenons que

$$t_n - \frac{1}{2} = t_n - c = 3^n(t_0 - c) = -\frac{3^n}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Et par suite que

$$J^n = A(t_n) = A(\frac{1}{2} - \frac{3^n}{2}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 3^n-1 & 0 \\ 3^n-1 & 1+3^n & 0 \\ 3^n-1 & 1+3^n & 1-2\times 3^n \end{pmatrix}$$

Exo E. A. a. On a $X_1 = 1$, de sorte que la variable aléatoire X_1 suit la loi certaine (égale à 1) : on est obligé de tirer la boule 1 au premier tout car il n'y a que la boule 1 dans l'urne. A fortiori, on a $E(X_1) = 1$ et $V(X_1) = 0$.

b. On a $P(X_1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_1 = 2 = \frac{1}{2}$ car on a autant de chance de tirer la boule 1 au premier tout (pour obtenir $X_1 = 1$) que de chance de tirer la boule 2 au premier tout (puis la boule 1 au second tour, pour obtenir $X_2 = 2$). De sorte que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])$ Et on a $E(X_2) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ et $V(X_2) = \frac{2^2-1}{12} = \frac{1}{4}$

c. On a $P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$, $P(X_3 = 3) = P(B_3)\times P_{B_3}(B_2)\times P_{B_3\cap B_2}(B_1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ d'après la formule des probabilités composées, de sorte que $P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Comme $X_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$, la VAR X_3 ne peut pas suivre une loi connue du cours (certaine, bernouilli, binomiale, uniforme) mais on trouve que

$$\begin{aligned} E(X_3) &= 1\times\tfrac{1}{3} + 2\times\tfrac{1}{2} + 3\times\tfrac{1}{6} = \tfrac{2+6+3}{6} = \tfrac{11}{6} \\ E(X_3^2) &= 1^2\times\tfrac{1}{3} + 2^2\times\tfrac{1}{2} + 3^2\times\tfrac{1}{6} = \tfrac{2+12+9}{6} = \tfrac{23}{6} \\ V(X_3) &= E(X_3^2) - E(X_3)^2 = \tfrac{23}{6} - \left(\tfrac{11}{6}\right)^2 = \tfrac{138-121}{36} = \tfrac{17}{36} \end{aligned}$$

B. a. La variable N_1 suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (on tire une boule parmi n boules numlérotées de 1 à n, elles ont toutes autant de chance d'être choisies). On a donc, d'après le cours

$$E(N_1) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(N_1) = \frac{n^2-1}{12}$$

b. X_n peut prendre toutes les valeurs entre 1 (si on tire la boule 1 en premier, avec la probabilité $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$) et n (si on tire la boule n puis la $n-1$, etc..., pour finir par la boule 1). Pour obtenir la valeur k, on peut par exemple commencer par tirer les boules en partant de la fin, puis au $k^{\text{ième}}$ tirage, on choisit la boule 1. A fortiori, $X_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

c. D'après la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n-1}) \times \cdots \times P(B_n \cap B_{n-1} \cap \cdots \cap B_2)(B_1) \\ &= \tfrac{1}{n} \times \tfrac{1}{n-1} \times \cdots \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{1} = \tfrac{1}{n!} \end{aligned}$$

C. a. Sachant que $N_1 = 1$, la variable X_n vaut 1 (on a tiré la boule 1 en premier)

b. Si $N_1 = j \geqslant 2$, au tirage suivant toutes les boules avec un numéro supérieur ou égal à j sont retirées et ne peuvent plus être obtenues. De sorte qu'on epeut faire au plus j-1 tirages après le premier (et donc j au maximum). A fortiori, il est impossible que $X_n > j$ de sorte que

$$P_{N_1=j}(X_n = k) = 0 \qquad (k > j)$$

Etant donné un nombre $k \in [\![2,j]\!]$, il est encore possible d'obtenir $X_n = k$ et la probabilité de l'obtenir $P_{N_1=j}(X_n = k)$ est la même que la probabilité $P(X_{j-1} = k-1)$ d'obtenir $k-1$ par le même procédé en utilisant uniquement $j-1$ boule (vu que la boule j obtenue en premier ajoute une boule et donne, une fois retirée, un procédé identique... un peu moisie comme explication de la « magie » des probabilités conditionnelles) De sorte que

$$P_{N_1=j}(X_n = k) = P(X_{j-1} = k-1) \qquad (2 \leqslant k \leqslant j)$$

c. Lorsque $k \geqslant 2$, il résulte de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(N_1 = j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ que

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \sum_{j=1}^{n} P(N_1 = j) \times P_{N_1=j}(X_n = k) \\ &= \frac{1}{n} \times \sum_{j=0}^{k-1} P(N_1 = j) \times \underbrace{P_{N_1=j}(X_n = k)}_{=0(\text{impossible})} + \sum_{j=k}^{n} P(N_1 = j) \times P_{N_1=j}(X_n = k) \\ &= \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{n} \times P_{N_1=j}(X_n = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{n} \times P(X_{j-1} = k-1) \end{aligned}$$

En procédant au changement d'indice $j' = j - 1$, il vient alors

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{j'=k-1}^{n-1} \times P(X_{j'} = k-1)$$

d. D'après la formule précédente, on a

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \times P(X_j = 1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}$$

e.

a. D'après la relation (1) pour $n' = n+1$ et $k' = n$, on déduit du résultat de la question B1c) que

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+1)!P(X_{n+1} = n) = (n+1)!\tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{j=n-1}^{n} P(X_j = n-1) \\ &= n!\,(P(X_{n-1} = n-1) + P(X_n = n-1)) \\ &= n!\left(\tfrac{1}{(n-1)! + P(X_n = n-1)}\right) = n + v_n \qquad (n \geqslant 2) \end{aligned}$$

b. D'après la question précédente, on a

$$v_2 = 2!P(X_2 = 1) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = v_n + n \qquad (n \geqslant 2)$$

A l'aide du principe des sommes telecopiques, il vient

$$v_n = v_2 + \sum_{k=2}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} k \qquad (n \geqslant 2)$$

En reconnaissant une somme arithmétique, nous concluons alors que

$$v_n = 1 + \frac{n+1}{2}(n-2) = \frac{n^2 - n - 2 + 2}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad (n \geqslant 2)$$