DEVOIR SURVEILLE 5

Exo A. On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = 2X \qquad \text{et} \qquad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \qquad (n \geqslant 2)$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour $n \geqslant 2$, on a

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Calculer T_2 et T_3
2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.
   b. Etablir que si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $T_n(1)$ en fonction de n.
4. a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\vartheta \in]0,\pi[$, établir que $T_n(\cos\vartheta) = \dfrac{\sin\big((n+1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta}$.
   b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que T_n admet n racines dans $]-1,1[$, à expliciter.
   c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $T_n = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$
   d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n
5. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\sin^2(\vartheta)T_n''(\cos\vartheta) - 3\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) + (n^2+2n)T_n(\cos\vartheta) = 0 \qquad (0 < \vartheta < \pi)$$

   Indication : On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) définie par

$$g(\vartheta) = \sin(\vartheta)T_n(\cos\vartheta) - \sin\big((n+1)\vartheta\big) \qquad (\vartheta \in \mathbb{R})$$

   b. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire que

$$(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0$$

Exo B. **Extrait EDHEC S**. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t$

1. a. Calculer u_0 et u_1.
   b. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   c. Montrer que la suite u est convergente
2. a. En remarquant que $(\sin t)^{n+2} = (\sin t)^n - \cos(t) \times \cos(t)(\sin t)^n$ et en procédant à une intégration par partie, montrer que

$$(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   b. En déduire que $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   c. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.
   d. En déduire la valeur de u_{2n+1} en fonction de n.

3. a. Calculer la limite de $\frac{u_{n+2}}{u_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b. En remarquant que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
   c. Enfin, montrer que l'on a $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Exo C. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est semi-magique *ssi* on obtient la même somme des coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne de M.
Par exemple, comme la somme des coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne est -1 pour $W = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice W est semi-magique
On note $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on admet que

$$\mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : JM = MJ\} \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $G = \mathrm{Vect}(E_1,E_2,E_3,E_4)$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

I. **ETUDE de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$**
   1. a. Prouver que $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E contenant J.
      b. Pour $M \in SM_3(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tM \in SM_3(\mathbb{R})$.
   2. a. Montrer que $E_1 \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$. On admet qu'on montrerait de même que E_2, E_3 et E_4 appartiennent à $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$. En déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension
      b. Montrer que si $M \in G$, alors $\mathrm{tr}(M) = 0$. On admet pour la suite que

$$G = \{M \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$$

      c. Montrer que $G \cap \mathrm{Vect}(J) = \{0\}$.
   3. Soit $M \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$. Justifier que la matrice $N = M - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J$ appartient à $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{tr}(N)$.
   4. a. Montrer que $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) = G \oplus \mathrm{Vect}(J)$.
      b. En déduire que $\dim(\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})) = 5$ et que (E_1,E_2,E_3,E_4,J) forme une base de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$.

II. **Etude d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$**
   Pour $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi(M) = m_{1,1} + m_{1,2} + m_{1,3} \qquad \text{et} \qquad \psi(M) = m_{3,1} + m_{2,2} + m_{1,3}$$

   On admet que $H = \{M \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) : \varphi(M) = \psi(M) = \mathrm{tr}(M)\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ de dimension 3.
   1. On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'on ait $D \in H$

b. Justifier que ${}^tD \in H$

c. Montrer que $(J, D, {}^tD)$ forme une base de H

Exo D. **Extrait EDHEC E**. On lance n fois, de façon indépendante, une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
Pour $k \geqslant 2$, on dit que le $k^{\text{ième}}$ lancer est un *changement* s'il amène un résultat différent du $(k-1)^{\text{ième}}$ lancer. Pour $n \geqslant 2$, on note X_n la variable égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers
On note P_k l'événement « on obtient pile au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

1. a. Donner la loi de X_2
   b. Donner la loi de X_3 et calculer son espérance et sa variance
2. Dans cette question, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
   a. i. Que vaut $X_n(\Omega)$?
      ii. Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.
      iii. En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que

$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right)$$

      iv. En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q
      v. Grace aux questions précédentes, démontrer que

$$P(X_4 = 1) = P(X_4 = 2) = 2pq(1 - pq)$$

      et préciser la loi de X_4. Calculer l'espérance de X_4.
   b. Pour $2 \leqslant k \leqslant n$, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ième}}$ lancer est un changement et 0 sinon, de sorte que Z_k est une variable de Bernoulli. Exprimer X_n à l'aide des variables Z_k et en déduire $E(X_n)$.
3. Dans cette question, on suppose que $p = q = \frac{1}{2}$.
   a. Vérifier en utilisant les résultats des questions précédentes que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.
   b. Soit $n \geqslant 2$.
      i. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, justifier que

$$\begin{aligned} P\big((X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) &= \tfrac{1}{2}P\big((X_n = k) \cap P_n\big) \\ P\big((X_n = k) \cap \overline{P_n} \cap \overline{P_{n+1}}\big) &= \tfrac{1}{2}P\big((X_n = k) \cap \overline{P_n}\big) \end{aligned}$$

      et en déduire que

$$P\big((X_n = k) \cap (X_{n+1} = k)\big) = \frac{1}{2}P(X_n = k)$$

      On admettra que l'on démontrerait de même que

$$P\big((X_n = k-1) \cap (X_{n+1} = k)\big) = \frac{1}{2}P(X_n = k-1)$$

      ii. Démontrer par récurrence que la variable X_n suit la loi $\mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})$