DEVOIR SURVEILLE 5 (CORRECTION)

Exo A. 1. D'après la formule définissant T_n par récurrence, on a

$$\begin{aligned} T_2 &= 2XT_1 - T_0 = 2X \times 2X - 1 = 4X^2 - 1 \\ T_3 &= 2XT_2 - T_1 = 2X \times (4X^2 - 1) - 2X = 8X^3 - 4X \end{aligned}$$

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad \exists Q_n \in \mathbb{R}[X] : T_n = 2^n X^n + Q_n \text{ et } \deg(Q_n) < n$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $T_0 = 1 = 2^0 X^0 + 0$ avec $Q_0 = 0 \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(0) = -\infty < 0$. $\mathcal{P}_1$ est vraie car $T_1 = 2X = 2^1 X^1 + 0$ avec $Q_1 = 0 \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(0) = -\infty < 1$.
- Supposons les propositions $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_{n-2}$ pour un entier $n \geqslant 2$. Il résulte alors de la formule définissant T_n par récurrence que

$$\begin{aligned} T_n &= 2XT_{n-1} - T_{n-2} \\ &= 2X(2^{n-1}X^{n-1} + Q_{n-1}) - T_{n-2} \\ &= 2^n X^n + \underbrace{2XQ_{n-1} - T_{n-2}}_{Q_{n+1}} = 2^n X^n + Q_{n+1} \end{aligned}$$

avec $Q_{n+1} = 2XQ_{n-1} - T_{n-2}$ polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant (d'après $\mathcal{P}_{n-2}$)

$$\begin{aligned} \deg(Q_{n+1}) &\leqslant \max\left(\deg(2XQ_{n-1}), \deg(T_{n-2})\right) \\ &\leqslant \max\left(1 + \deg(Q_{n-1}), n-2\right) \\ &\leqslant \max\left(1 + n - 2, n-2\right) = n - 1 < n \end{aligned}$$

En particulier, la proposition $\mathcal{P}_n$ est satisfaite

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{Q}_n : \qquad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$$

- $\mathcal{Q}_0$ est vraie car $T_0(-X) = 1 = (-1)^0 T_0(X)$. De même $\mathcal{Q}_1$ est vraie car $T_1(-X) = -2X = (-1)^1 T_1(X)$.
- Supposons les proposition $\mathcal{Q}_{n-2}$ et $\mathcal{Q}_{n-1}$ pour un entier $n \geqslant 2$. D'aprè la relation définissant par récurrence le polynôme T_n, nous avons

$$\begin{aligned} T_n(-X) &= -2XT_{n-1}(-X) - T_{n-2}(-X) = -2X(-1)^{n-1}T_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}T_{n-2}(X) \\ &= 2X(-1)^n T_{n-1}(X) - (-1)^n(-1)^2 T_{n-2}(X) \\ &= (-1)^n(2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)) = (-1)^n T_n(X) \end{aligned}$$

En particulier, la proposition $\mathcal{Q}_n$ est satisfaite

En conclusion, la proposition $\mathcal{Q}_n$ est vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que la parité de T_n en tant que polynôme (ou fonction polynôme) est la même que la parité de n (en tant que nombre entier).

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous posons $u_n = T_n(1)$ et nou substituons 1 à X dans la relation définissant T_n par récurrence pour obtenir que

$$u_n = T_n(1) = 2 \times 1 \times T_{n-1}(1) - T_{n-2}(1) = 2u_{n-1} - u_{n-2} \qquad (n \geqslant 2).$$

En particulier, la suite u vérifie une relation de récurrence linéaired'ordre 2, de polynôme caractéristique

$$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

Comme ce polynôme admet 1 comme racine double, nous obtenons qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$u_n = T_n(1) = \lambda \times 1^n + \mu \times n1^n = \lambda + \mu n$$

Comme $u_0 = T_0(1) = 1$ et comme $u_1 = T_1(1) = 2 \times 1 = 2$, il vient $\lambda = 1$ et $\mu + \lambda = 2$ d'où $\mu = 1$. En conclusion, nous avons donc obtenu que

$$u_n = \lambda + \mu n = 1 + n \qquad (n \geqslant 0).$$

4. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{H}_n : \qquad T_n(\cos\vartheta) = \frac{\sin\big((n+1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta} \qquad (0 < \vartheta < \pi)$$

- La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car $T_0(\cos\vartheta) = 1 = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta}$ pour $0 < \vartheta < \pi$ (le sinus ne s'annulant pas). La proposition $\mathcal{H}_1$ est également vraie car $T_1(\cos\vartheta) = 2\cos\vartheta = \frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta}$ pour $0 < \vartheta < \pi$, car il est bien connu que $\sin(2\vartheta) = 2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$.
- Supposons les proposition $\mathcal{H}_{n-2}$ et $\mathcal{H}_{n-1}$ pour un entier $n \geqslant 2$. D'aprè la relation définissant par récurrence le polynôme T_n, nous avons

$$\begin{aligned} T_n(\cos\vartheta) &= 2\cos(\vartheta)T_{n-1}(\cos\vartheta) - T_{n-2}(\cos\vartheta) \\ &= 2\cos(\vartheta)\tfrac{\sin(n\vartheta)}{\sin\vartheta} - \tfrac{\sin\big((n-1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta}(\cos\vartheta) \\ &= \tfrac{2\cos(\vartheta)\sin(n\vartheta) - \sin\big((n-1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta} \\ &= \tfrac{2\cos(\vartheta)\sin(n\vartheta) - \sin\big((n-1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta} \\ &= \tfrac{\sin(n\vartheta+\vartheta)+\sin(n\vartheta-\vartheta) - \sin\big((n-1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta} \\ &= \tfrac{\sin\big((n+1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta} \qquad (0 < \vartheta < \pi) \end{aligned}$$

En particulier, la proposition $\mathcal{H}_n$ est vérifiée

En conclusion, la proposition $\mathcal{H}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\vartheta = \frac{k\pi}{n+1}$, nous déduisons de la formule précédente que

$$T_n(\cos\vartheta) = \frac{\sin\big((n+1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta} = \frac{\sin\big(k\pi\big)}{\sin\vartheta} = 0$$

De sorte que le nombre $\cos\frac{k\pi}{n+1}$ est une racine de T_n pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Comme ces nombres sont distincts 2 à 2 lorsque $1 \leqslant k \leqslant n$, car la fonction cosinus est une bijection strictement décroissante de $]0,\pi]$ sur $]-1,1[$ et car $0 < \frac{k\pi}{n+1} \leqslant \frac{n\pi}{n+1} < \pi$, nous remarquons que ce sont les racines du polynôme T_n , qui est de degré n. e plus ils appartient à l'intervalle et appartient à l'intervalle $]-1,1[$

c. Comme T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^n et de racines $\cos \frac{k\pi}{n+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, il résulte du théorème de décomposition des polynômes (dans $\mathbb{R}$) que

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En substituant 1 à X dans l'identité précédente, il vient

$$u_n = 1 + n = T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

Comme il est bien connu que $\cos(2\vartheta) = 1 - 2\sin^2(\vartheta)$ et donc que $1 - \cos(2\vartheta) = 2\sin^2\vartheta$, nous obtenons alors pour $\vartheta = \frac{k\pi}{2(n+1)}$ que

$$1 + n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}$$

En particulier, il vient

$$\frac{1+n}{2^n} = \prod_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} = \left(\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right)^2$$

En passant à la racine carrée, nous obtenons que le produit des sinus (qui est positif), vaut

$$\frac{\sqrt{1+n}}{2^{\frac{n}{2}}} == (\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \qquad (n \geqslant 0)$$

Wow , chaud !

5. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\sin^2(\vartheta)T_n''(\cos\vartheta) - 3\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) + (n^2+2n)T_n(\cos\vartheta) = 0 \qquad (0 < \vartheta < \pi)$$

En dérivant deux fois la fonction (nulle, d'après le résultat de la question 4a), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
0 \quad &= g'(\vartheta) = \cos(\vartheta)T_n(\cos\vartheta) - \sin(\vartheta)^2 T_n'(\cos\vartheta) - (n+1)\cos\big((n+1)\vartheta\big) \qquad (0 < \vartheta < \pi) \\
0 \quad &= g''(\vartheta) = -\sin(\vartheta)T_n(\cos\vartheta) - \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) \\
&\quad -2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) \\
&\quad +\sin(\vartheta)^3 T_n''(\cos\vartheta) + (n+1)\sin\big((n+1)\vartheta\big) \\
&= -\sin(\vartheta)T_n(\cos\vartheta) - 3\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) + \sin(\vartheta)^3 T_n''(\cos\vartheta) \\
&\quad +(n+1)^2\sin\big((n+1)\vartheta\big) \qquad (0 < \vartheta < \pi)
\end{aligned}$$

En divisant par $\sin\vartheta$, il vient

$$\begin{aligned}
0 \quad &= -T_n(\cos\vartheta) - 3\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) + \sin(\vartheta)^2 T_n''(\cos\vartheta) + (n+1)^2 \frac{\sin\big((n+1)\vartheta\big)}{\sin\vartheta} \\
&= -T_n(\cos\vartheta) + 3\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) - \sin(\vartheta)^2 T_n''(\cos\vartheta) + (n+1)^2 T_n(\cos\vartheta) \\
&= \big((n+1)^2 - 1\big)T_n(\cos\vartheta) + 3\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) - \sin(\vartheta)^2 T_n''(\cos\vartheta) \\
&= (n^2+2n)T_n(\cos\vartheta) + 3\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta) - \sin(\vartheta)^2 T_n''(\cos\vartheta) \qquad (0 < \vartheta < \pi)
\end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule précédente, on a

$$0 = (n^2+2n)T_n(\cos\vartheta)+3\cos(\vartheta)T_n'(\cos\vartheta)-(1-\cos(\vartheta)^2)^2T_n''(\cos\vartheta) \qquad (0<\vartheta<\pi)$$

Comme le polynôme $Q = (X^2-1)T_n''+3XT_n'-(n^2+2n)T_n$ admet pour racine les nombres $\cos(\vartheta)$ pour $0<\vartheta<\pi$ et Comme le seul polynôme admettant une infinité de racine est la polynôme nul, on conclut que $Q=0$, c'est à dire que

$$(X^2-1)T_n''+3XT_n'-(n^2+2n)T_n = 0$$

Exo B. **Extrait EDHEC S**. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t$

1. Remarque : Pout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\sin t)^n$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. A fortiori, le nombre u_n est défini en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue

   a.

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^0 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = [t]_0^{\pi/F2} = \tfrac{\pi}{2} \\ u_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^1 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\pi/F2} = 1 \end{aligned}$$

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous déduisons de la positivité de l'intégrale que

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1}\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin t)^{n+1} - (\sin t)^n\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin t)^n\,(\sin t - 1)}_{\leqslant 0}\mathrm{d}t \leqslant 0 \end{aligned}$$

   En particulier, la suite u est décroissante

   c. Comme la fonction $t \mapsto (\sin t)^n$ est positive sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, il résulte de la positivité de l'intégrale que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t \geqslant 0$. Comme la suite u est minorée par 0 et décroissante, elle converge.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\sin t)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\times\cos(t)(\sin t)^n\mathrm{d}t \\ &= u_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\times\cos(t)(\sin t)^n\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Comme les applications $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \frac{(\sin t)^{n+1}}{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, en procédant à une intégration par partie, il vient

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_n - \left(\left[\cos(t)\tfrac{(\sin t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t)\times\tfrac{(\sin t)^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}t\right) \\ u_{n+2} &= u_n - \left(0 + \tfrac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}\mathrm{d}t\right) \\ u_{n+2} &= u_n - \tfrac{1}{n+1}u_{n+2} \end{aligned}$$

En multipliant par $n+1$, nous obtenons alors que $(n+1)u_{n+2} = (n+1)u_n - u_{n+2}$ puis que

$$(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \qquad u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{(2\times 0)!}{(2^0 0!)^2} \frac{\pi}{2}$
- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation obtenue précédemment, nous avons

$$u_{2(n+1)} = u_{n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} u_{2n}$$

Il résulte alors de $\mathcal{P}_n$ que

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} &= \tfrac{2n+1}{2n+2} \tfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{2n+1}{2(n+1)} \tfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \tfrac{\pi}{2} \\ &= \tfrac{2n+1}{2(n+1)} \tfrac{2n+2}{2n+2} \tfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \tfrac{\pi}{2} \\ &= \tfrac{(2n+1)(2n+2)}{2(n+1)\times 2(n+1)} \tfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \tfrac{\pi}{2} \\ &= \tfrac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

En particulier, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

c. Montrons que l'on définit une suite constante v égale à $\frac{\pi}{2}$ en posant

$$v_n = (n+1)u_{n+1}u_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il résulte alors du résultat établi à la question 2a que

$$v_n = (n+1)u_{n+1}u_n = (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = v_{n+1}$$

En particulier, la suite v est constante. Or il résulte du résultat établi à la question 1 que

$$v_0 = 1 \times u_1 \times u_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

En conclusion, on a bien $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

d. Il résulte du résultat précédent que $(2n+1)u_{2n+1}u_{2n} = \frac{\pi}{2}$ pour $n \geqslant 0$. A fortiori, nous déduisons du résultat de la question 2b que

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= \tfrac{\frac{\pi}{2}}{(2n+1)u_{2n}} \\ &= \tfrac{\frac{\pi}{2}}{(2n+1)} \times \tfrac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \tfrac{1}{\frac{\pi}{2}} \\ &= \tfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

3. a. Comme $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ d'après le résultat de la question 2a, il vient

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \qquad (n \in \mathbb{R})$$

En particulier, nous obtenons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = 1$.

b. En remarquant que $u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, et en divisant par u_n (qui est non nul d'après les formules obtenues précédemment), nous obtenons que

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Comme les suites de droite et de gauche convergent vers 1, il résulte du principe des gendarmes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c. Comme $(n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$, nous remarquons que

$$\frac{2n}{\pi}(u_n)^2 = (n+1)u_n u_{n+1} \times \frac{2}{\pi}\frac{n}{n+1}\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n}{n+1}\frac{u_n}{u_{n+1}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, nous remarquons d'une part que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\pi}(u_n)^2 = 1$ et d'autre part (en prenant la racine carrée, qui est continue en 1) que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}(u_n)^2} = \sqrt{1} = 1$$

En particulier, on a $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exo C. I. **ETUDE de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$**

1. a.
- Par définition $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui est un espace vectoriel de référence

- $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ car la matrice J est une matrice semi-magique (les sommes sur les lignes et les colonnes valent toutes 3)

- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M,N) \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})^2$. Nous remarquons d'une part $\lambda M + \mu N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, par stabilité par combinaison linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais d'autre part que

$$(\lambda M + \mu N)J = \lambda MJ + \mu MJ = \lambda JM + \mu JN = J(\lambda M + \mu N)$$

En particulier, la matrice $\lambda M + \mu N$ est une matrice semi-magique de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ (d'après sa définition admise avec J)

En conclusion, $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E, contenant J.

b. Soit $M \in SM_3(\mathbb{R})$.Alors $JM = MJ$ et nous déduisons alors des propriétés de la transposition que

$$J^tM = {}^tJ^tM = {}^t(MJ) = {}^t(JM) = {}^tM^tJ = {}^tMJ$$

En particulier, nous obtenons que ${}^tM \in SM_3(\mathbb{R})$.

2. a. La matrice E_1 est une matrice carrée de taille 3 vérifiant

$$JE_1 = \begin{pmatrix} 0+1-1 & -1+0+1 & 1-1+0 \\ 0+1-1 & -1+0+1 & 1-1+0 \\ 0+1-1 & -1+0+1 & 1-1+0 \end{pmatrix} = 0$$
$$= \begin{pmatrix} 0-1+1 & 0-1+1 & 0-1+1 \\ 1+0-1 & 1+0-1 & 1+0-1 \\ -1+1+0 & -1+1+0 & -1+1+0 \end{pmatrix} = E_1 J$$

En particulier, nous avons $E_1 \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$. Comme E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des vecteurs de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ et comme $G = \mathrm{Vect}(E_1,E_2,E_3,E_4)$, nous remarquons que G est un espace vectoriel engendré par une partie de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$. A fortiori, G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$. La famille (E_1,E_2,E_3,E_4) est clairement génératrice de G. Montrons que c'est une famille libre *on pourrait faire un calcul de rang mais c'est lourd avec une matrice* 9×4*, c'est plus agréable ici via la méthode théorique standard.* Soient a,b,c,d des nombres réels tels que $aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 = 0$. En regardant le coefficient de la premiere ligne, premiere colonne, il vient

$$a \times 0 + b \times 1 + c \times 0 + d \times 0 = b = 0$$

de sorte que $b = 0$ et $aE_1 + cE_3 + dE_4 = 0$. En regardant le coefficient central, il vient

$$a \times 0 + c \times 0 + d \times 1 = d = 0$$

de sorte que $d = 0$ et $aE_1 + cE_3 = 0$. Comme E_1 et E_3 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre à eux deux, de sorte que $a = 0$ et $c = 0$. A fortiori, $a = b = c = d = 0$. En conclusion, la famille (E_1,E_2,E_3,E_4) est libre, comme elle engendre G, c'est une base de G, qui est donc de dimension 4.

b. Soit $M \in G = \mathrm{Vect}(E_1,E_2,E_3,E_4)$. Alors, il existe des nombres réels a, b, c et d tels que

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

et alors, par linéarité de la trace, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M) &= \mathrm{tr}(aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4) = a\mathrm{tr}(E_1) + b\mathrm{tr}(E_2) + c\mathrm{tr}(E_3) + d\mathrm{tr}(E_4) \\ &= a \times (0+0+0) + b \times (1+0-1) + c \times (0+0+0) + d \times (0+1-1) = 0 \end{aligned}$$

On admet pour la suite que

$$G = \{M \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$$

c. Comme G et $\mathrm{Vect}(J)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et contiennent le même 0, il est trivial que $\{0\} \subset G \cap \mathrm{Vect}(J)$. Montrons maintenant que $G \cap \mathrm{Vect}(J) \subset \{0\}$. Soit $M \in G \cap \mathrm{Vect}(J)$. Alors $M \in \mathrm{Vect}(J)$, de sorte qu'il existe un nombre réel λ tel que $M = \lambda J$. Mais comme $M \in G$, nous déduisons de la propriété admise de G que $0 = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(\lambda J) = \lambda\mathrm{tr}(J) = 3\lambda$. A fortiori, $\lambda = 0$ et donc $M = \lambda J = 0J = 0$, ce qu'il fallait démontrer, nous avons bien que $M \in \{0\}$ et donc que $G \cap \mathrm{Vect}(J) \subset \{0\}$ En conclusion, nous avons établi que $G \cap \mathrm{Vect}(J) = \{0\}$

3. Soit $M \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ et $N = M - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J$. Nous remarquons que

$$JN = J\left(M - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J\right) = JM - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J\times J = MJ - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J\times J = \left(M - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J\right)J = NJ$$

En particulier, la matrice N est semi-magique. De plus, nous observons également que

$$\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}\left(M - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J\right) = \mathrm{tr}(M) - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}\mathrm{tr}(J) = \mathrm{tr}(M) - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}\times 3 = 0$$

En particulier, la matrice N appartient à G.

4. a. Nous avons montré à la question 2c que $G \cap \mathrm{Vect}(J) = \{0\}$, de sorte que nous avons $G \oplus \mathrm{Vect}(J)$ (la somme de G et de $\mathrm{Vect}(J)$ est directe). Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) = G + \mathrm{Vect}(J)$ et plus particulièrement que $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) \subset G + \mathrm{Vect}(J)$ (puisque l'autre implication est triviale, G et $\mathrm{Vect}(J)$ étant des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$). Soit $M \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$. Nous remarquons alors que

$$M = \underbrace{M - \frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J}_{N\in G} + \underbrace{\frac{\mathrm{tr}(M)}{3}J}_{\in \mathrm{Vect}(J)} = N + \mathrm{tr}(M)J$$

En particulier, M est la somme de N qui appartient à G (résultat de la question 3) et de $\mathrm{tr}(M)J$ qui appartient à $\mathrm{Vect}(J)$, de sorte que $M \in G + \mathrm{Vect}(J)$, CQFD. En conclusion, nous avons établi que $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) = G \oplus \mathrm{Vect}(J)$.

   b. (E_1,E_2,E_3,E_4) forme une base de G, $J \neq 0$ forme une base de $\mathrm{Vect}(J)$ et $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) = G \oplus \mathrm{Vect}(J)$. A fortiori, (E_1,E_2,E_3,E_4,J) (la concaténation des bases) forme une base de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$, qui est de dimension 5.

II. **Etude d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$**

Pour $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi(M) = m_{1,1} + m_{1,2} + m_{1,3} \quad \text{et} \quad \psi(M) = m_{3,1} + m_{2,2} + m_{1,3}$$

On admet que $H = \{M \in \mathcal{S}M_3(\mathbb{R}) : \varphi(M) = \psi(M) = \mathrm{tr}(M)\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$ de dimension 3.

1. On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Pour que D appartienne à $H \subset \mathcal{S}M_3(\mathbb{R})$, il est nécéssaire que D soit une matrice semi-magique, c'est-à-dire que $\lambda = -1$ pour que les sommes sur les colonnes et les lignes de D valent toutes 0. Réciproquement, pour $\lambda = 0$, la matrice D est semi-magique et vérifie $\mathrm{tr}(D) = -1 + 0 + 1 = 0 \quad \varphi(M) = -1 + 2 + \lambda = 0 \quad \psi(M) = 1 + 0 + \lambda = 0$ de sorte que D appartient à H. (c'est un carré magique en fait)

   b. Comme D est semi-magique, sa transposée ^{t} est semi-magique (résultat 1b). Comme $\psi({}^tD) = \mathrm{tr}(D)$, $\mathrm{tr}({}^tD) = \psi(D)$, nous en déduisons que ${}^tD$ appartient aussi à H (ces deux nombres restant égaux à $\varphi(D) = \varphi^tD)$, car D est semi-magique). En bref, ${}^tD$ est aussi un carré magique.

c. Les matrices, D (d'après II1a), ${}^tD$ (d'après II1b) et J (trivial) sont des matrices de H, qi est de dimension 3. Comme ces trois matrices forment une famille libre (via le rang ou la démonstration suivante), c'est une base de H. Montrons que la famille est libre (via la définition). Soient a,b et c des nombres réels tels que $aD + b{}^tD + cJ = 0$. En regardant le coefficient central, on obtient que

$$a \times 0 + b \times 0 + c \times 1 = c = 0$$

Donc $c = 0$ et $aD + b{}^tD = 0$. Comme les vecteurs D et ${}^tD$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre (de deux vecteurs) de sorte que $a = b = 0$. En conclusion, nous avons obtenu que $a = b = c = 0$. La famille $(J,D,{}^tD)$ est donc libre et forme une base de H.

Exo D. **Extrait EDHEC E**. On lance n fois, de façon indépendante, une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
Pour $k \geqslant 2$, on dit que le $k^{\text{ième}}$ lancer est un *changement* s'il amène un résultat différent du $(k-1)^{\text{ième}}$ lancer. Pour $n \geqslant 2$, on note X_n la variable égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers
On note P_k l'événement « on obtient pile au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

1. a. On a soit zéro, soit un changement au cours des 2 lancers, de sorte que X_2 suit une loi de Bernoulli. De plus, on a $(X_2 = 1) = (P_1 \cap \overline{P_2}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2)$. Les deux intersections étant incompatibles et les lancers étant indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) \quad &= P(P_1 \cap \overline{P_2}) + P(\overline{P_1} \cap P_2) \\ &= P(P_1) \times P(\overline{P_2}) + P(\overline{P_1}) \times P(P_2) \\ &= p \times q + q \times p = 2pq \end{aligned}$$

En conclusion, $X_2 \hookrightarrow B(2pq)$.

b. On procède comme à la question 1. Il sera utilse de remarquer que

$$1 = (p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p+q) = p^3 + q^3 + 3pq$$

Pour 3 lancers, on peut avoir 0, 1 ou 2 changements ($X_3(\Omega) = [\![0,2]\!]$) et on a

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) \quad &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) \\ &= P(P_1) \times P(P_2) \times P(P_3) + P(\overline{P_1}) \times P(\overline{P_2}) \times P(\overline{P_3}) \\ &= p^3 + q^3 = (p+q)^3 - 3p^2q - 3pq^2 = 1 - 3pq(p+q) = 1 - 3pq \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) \quad &= P(P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3) + P(\overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3}) \\ &= P(P_1) \times P(\overline{P_2}) \times P(P_3) + P(\overline{P_1}) \times P(P_2) \times P(\overline{P_3}) \\ &= pqp + qpq = pq(p+q) = pq \end{aligned}$$

A fortiori, il vient $P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = 1 - p^3 - q^3 - pq = 1 - (1 - 3pq) - pq = 2pq$. On vient de donner tout ce qu'il faut pour déterminer la loi de X_3, qui n'est pas une loi connue :

$$P(X_3 = 0) = 1 - 3pq \qquad P(X_3 = 1) = 2pq, \qquad P(X_3 = 2) = pq$$

Pour l'espérance, nous déduisons de la définition de l'espérance et de la formule de transfert que

$$\begin{aligned}
E(X_3) &= 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) \\
&= 1 - p^3 - q^3 - pq + 2 \times pq = 1 - p^3 - q^3 + pq = 4pq \\
E(X_3^2) &= 0^2 \times P(X_3 = 0) + 1^2 \times P(X_3 = 1) + 2^2 \times P(X_3 = 2) \\
&= 1 - p^3 - q^3 - pq + 4 \times pq = 1 - p^3 - q^3 + 3pq = 6pq
\end{aligned}$$

A fortiori, il résulte de la formule de Koenig-Huygens que

$$\begin{aligned}
V(X_3) &= E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 1 - p^3 - q^3 + 3pq - (1 - p^3 - q^3 + pq)^2 \\
&= 6pq - (4pq)^2 = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq)
\end{aligned}$$

Les calculs étant un peu horribles, il doit y avoir un truc.... Remarquons que $1 = p + q$, de sorte que le binôme de Newton induit que

$$1 = 1^3 = (p+q)^3 = p^3+q^3+3p^2q+3pq^2 = p^3+q^3+3pq(p+q) = p^3+q^3+3pq$$

En particulier, nous remarquons que $1 - p^3 - q^3 = 3pq$ et en reportant (en rouge dans les calculs précédents, il vient

$$P(X_3 = 0) = 1-3pq,\ P(X_3 = 1) = 2pq\ P(X_3 = 2) = pq\ E(X_3) = 4pq,\ V(X_3) = 6pq-16p^2q^2$$

Bon, on ne reconnait toujours pas de loi du cours.

2. Dans cette question, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

   a. i. En jettant n pieces, on peut avoir entre 0 et $n - 1$ changements, de sorte que $X_n(\Omega) = [\![0,n - 1]\!]$.

      ii. Exprimer $(X_n = 0) = \cap_{k=1}^n P_k \cup \cap_{k=1}^n \overline{P_k}$. Comme les deux intersections sont incompatibles et comme les lancers sont indépendants, il vient

$$\begin{aligned}
P(X_n = 0) &= P\left(\cap_{k=1}^n P_k\right) + P\left(\cap_{k=1}^n \overline{P_k}\right) = \prod_{k=1}^n P(P_k) + \prod_{k=1}^n P(\overline{P_k}) \\
&= p^n + q^n
\end{aligned}$$

      iii. En remarquant que

$$\begin{aligned}
(X_n = 1) &= \text{« Que des piles puis que des faces ou que des faces puis que des piles »} \\
&= \cup_{k=1}^{n-1}\left(\cap_{j=1}^k P_j \cap \cap_{j=k+1}^n \overline{P_j}\right) \cup \cup_{k=1}^{n-1}\left(\cap_{j=1}^k \overline{P_j} \cap \cap_{j=k+1}^n P_j\right)
\end{aligned}$$

Comme toutes les intersections sont incompatibles2 à 2 et que les lancers sont indépendants, on a

$$\begin{aligned}
P(X_n = 1) &= \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\cap_{j=1}^k P_j \cap \cap_{j=k+1}^n \overline{P_j}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\cap_{j=1}^k \overline{P_j} \cap \cap_{j=k+1}^n P_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^k P(P_j) \times \prod_{j=k+1}^n P(\overline{P_j}) + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^k P(\overline{P_j}) \times \prod_{j=k+1}^n P(P_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p^k \times q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} q^k \times p^{n-k}
\end{aligned}$$

Comme on obtient deux sommes de termes de suites géométriques de raison $\frac{p}{q} \neq 1$ et $\frac{q}{p} \neq 1$, il vient (en multipliant en haut et en bas par q le premier quotient et par p le second)

$$\begin{aligned} P(X_n=1) &= \frac{pq^{n-1}-p^n}{1-\frac{p}{q}}+\frac{qp^{n-1}-q^n}{1-\frac{q}{p}} \\ &= \frac{pq^n-p^nq}{q-p}+\frac{qp^n-pq^n}{p-q} \\ &= \frac{pq^n-p^nq-qp^n+pq^n}{q-p} = 2\frac{pq^n-p^nq}{q-p} \\ &= 2pq\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q-p} \end{aligned}$$

iv.

v. En remarquant que

$$\begin{aligned} (X_n=n-1) &= \text{« Les piles alternent avec les faces »} \\ &= \cap^n_{\substack{j=1\\ j\text{pair}}} P_j \cap \cap^n_{\substack{j=1\\ j\text{impair}}} \overline{P_j} \cup \cap^n_{\substack{j=1\\ j\text{ pair}}} \overline{P_j} \cap \cap^n_{\substack{j=1\\ j\text{ impair}}} P_j \end{aligned}$$

Comme les intersections sont incompatibles 2 à 2 et que les lancers sont indépendants, il vient

$$\begin{aligned} P(X_n=n-1) &= P\left(\cap^n_{\substack{j=1\\ j\text{pair}}} P_j \cap \cap^n_{\substack{j=1\\ j\text{impair}}} \overline{P_j}\right) + P\left(\cap^n_{\substack{j=1\\ j\text{ pair}}} \overline{P_j} \cap \cap^n_{\substack{j=1\\ j\text{ impair}}} P_j\right) \\ &= \prod^n_{\substack{j=1\\ j\text{pair}}} P(P_j) \times \prod^n_{\substack{j=1\\ j\text{impair}}} P(\overline{P_j}) + \prod^n_{\substack{j=1\\ j\text{ pair}}} P(\overline{P_j}) \times \prod^n_{\substack{j=1\\ j\text{ impair}}} P(P_j) \\ &= \prod^n_{\substack{j=1\\ j\text{pair}}} p \times \prod^n_{\substack{j=1\\ j\text{impair}}} q + \prod^n_{\substack{j=1\\ j\text{ pair}}} q \times \prod^n_{\substack{j=1\\ j\text{ impair}}} p \end{aligned}$$

En notant P le nombre de nombres pairs entre 1 et n et I le nombre de nombres impairs entre 1 et n, il vient

$$P(X_n=n-1) = p^P\times q^I + q^P\times p^I = \begin{cases} p^kq^k+q^kp^k = 2(pq)^k = 2(pq)^{n/2} \\ p^kq^{k+1}+q^kp^{k+1} = (q+p)(pq)^k = (pq)^k = (pq)^{(n-1)/2} \end{cases}$$

vi. Appliquons le résultat obtenu à la question 2.a.iii pour $n=4$. Alors, il résulte des identités $q^3-p^3=(q-p)(q^2+pq+p^2)$ et $1=1^2=(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$ que

$$\begin{aligned} P(X_4=1) &= 2pq\frac{q^{4-1}-p^{4-1}}{q-p} = 2pq\frac{q^3-p^3}{q-p} \\ &= 2pq(q^2+pq+p^2) = 2pq(1-2pq+pq) = 2pq(1-pq) \end{aligned}$$

Comme le résultat de la question 2.a.ii, et la formule du binôme de Newton donnent que $P(X_4=0)=p^4+q^4$ et $(p+q)^4=p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4$, il vient

$$\begin{aligned} P(X_4=0) &= p^4+q^4 = (p+q)^4-4p^3q-6p^2q^2-4q^3p \\ &= 1-4pq(p^2+q^2)-6p^2q^2 \\ &= 1-4pq((p+q)^2-2pq)-6p^2q^2 \\ &= 1-4pq(1-2pq)-6p^2q^2 = 1-4pq+2p^2q^2 \end{aligned}$$

Enfin, le résultat obtenu à la question 2.a.iv donne pour $n=4$ (cas pair) que $P(X_4=3)=2(pq)^2$.A fortiori, via le complémentaire, nous obtenons que

$$\begin{aligned} P(X_4=2) &= 1-P(X_4=0)-P(X_4=1)-P(X_4=3) \\ &= 1-(1-4pq+2p^2q^2)-2pq(1-pq)-2(pq)^2 \\ &= 4pq-2(pq)^2-2pq+2(pq)^2-2(pq)^2 = 2pq-2(pq)^2 = 2pq(1-pq) \end{aligned}$$

La loi de X_4 est donnée par $X_4(\Omega) = [\![0{,}3]\!]$ et

$$P(X_4 = 0) = 1-4pq+2p^2q^2,\ P(X_4 = 1) = P(X_4 = 2) = 2pq(1-pq),\ P(X_4 = 3) = 2(pq)^2$$

Ce n'est pas une loi du cours. L'esperance de X_4 vaut

$$\begin{aligned} E(X_4) &= 0 \times P(X_4 = 0) + 1 \times P(X_4 = 1) + 2 \times P(X_4 = 2) + 3 \times P(X_4 = 3) \\ &= 0 + 2pq(1-pq) + 2 \times 2pq(1-pq) + 3 \times 2(pq)^2 \\ &= 6pq \end{aligned}$$

b. du fait de l'incompatibilité des intersections et de l'indépendance destirages, on a

$$\begin{aligned} P(Z_k = 1) &= P(P_{k-1} \cap \overline{P_p} \cup \overline{P_{k-1}} \cap P_k) \\ &= P(P_{k-1} \cap \overline{P_p}) + P(\overline{P_{k-1}} \cap P_k) \\ &= P(P_{k-1})P(\overline{P_p}) + P(\overline{P_{k-1}})P(P_k) \\ &= pq + qp = 2pq \end{aligned}$$

En particulier, Z_k suit la loi de bernoulli de paramètre $2pq$.
Pour $2 \leqslant k \leqslant n$, Pour compter le nombre de changements, il suffit d'ajouter 1 lors d'un changement et 0 lorsqu'il n'y en a pas au tirage k. C'est exactement ce que fait la formule $X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k$. L'espérance étant linéaire, il vient

$$E(X_n) = E\left(\sum_{k=2}^{n} Z_k\right) = \sum_{k=2}^{n} E(Z_k) = \sum_{k=2}^{n} 2pq = 2(n-1)pq$$

3. Dans cette question, on suppose que $p = q = \frac{1}{2}$.

a. En reprenant les probabilités trouvées au 1.b, pour $p = q = \frac{1}{2}$, on obtient que

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) = 1 - 3pq = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4} &= \tbinom{2}{0}\tfrac{1}{2^2} \\ P(X_3 = 1) = 2pq = \tfrac{1}{2} &= \tbinom{2}{1}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}, \\ P(X_3 = 2) = pq = \tfrac{1}{4} &= \tbinom{2}{2}\tfrac{1}{2^2} \end{aligned}$$

En particulier, on reconnait que X_3 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
De même, en reprenant les probabilités trouvées au 2.a.v, pour $p = q = \frac{1}{2}$, on obtient que

$$\begin{aligned} P(X_4 = 0) = 1 - 4pq + 2p^2q^2 = \tfrac{1}{8} &= \tbinom{3}{0}\tfrac{1}{2^3}, \\ P(X_4 = 1) = P(X_4 = 2) = 2pq(1-pq) = \tfrac{3}{8} &= \underbrace{\tbinom{3}{1}}_{=\binom{3}{2}}\tfrac{1}{2^1}\tfrac{1}{2^2}, \\ P(X_4 = 3) = 2(pq)^2 = \tfrac{1}{8} &= \tbinom{3}{3}\tfrac{1}{2^3} \end{aligned}$$

En particulier, on reconnait que X_3 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

b. Soit $n \geqslant 2$.

i. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, il résulte de l'indépendance du $n+1)^{\text{ième}}$ tirage avec les n premiers tirages que

$P\big((X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = P\big((X_n = k) \cap P_n\big) P(P_{n+1}) = \frac{1}{2} P\big((X_n = k) \cap P_n\big)$
$P\big((X_n = k) \cap \overline{P_n} \cap \overline{P_{n+1}}\big) = P\big((X_n = k) \cap \overline{P_n}\big) P(\overline{P_{n+1}}) = \frac{1}{2} P\big((X_n = k) \cap \overline{P_n}\big)$

Il résulte alors de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $S = (P_n \cap P_{n+1}, P_n \cap \overline{P_{n+1}}, \overline{P_n} \cap P_{n+1}, \overline{P_n} \cap \overline{P_{n+1}}$ que

$$\begin{aligned}
P\big(X_n = k) \cap (X_{n+1} = k)\big) &= P\big(X_n = k) \cap (X_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \\
&+P\big(X_n = k) \cap (X_{n+1} = k) \cap P_n \cap \overline{P_{n+1}}\big) \\
&+P\big(X_n = k) \cap (X_{n+1} = k) \cap \overline{P_n} \cap P_{n+1}\big) \\
&+P\big(X_n = k) \cap (X_{n+1} = k) \cap \overline{P_n} \cap \overline{P_{n+1}}\big) \\
&= P\big(X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) + 0 \\
&+0 + P\big(X_n = k) \cap \overline{P_n} \cap \overline{P_{n+1}}\big) \\
&= \tfrac{1}{2} P\big(X_n = k) \cap P_n\big) + \tfrac{1}{2} P\big(X_n = k) \cap \overline{P_n}\big) \\
&= \tfrac{1}{2} P\big(X_n = k)\big)
\end{aligned}$$

et en déduire que

$$P\big((X_n = k) \cap (X_{n+1} = k)\big) = \frac{1}{2} P(X_n = k)$$

On admettra que l'on démontrerait de même que

$$P\big((X_n = k-1) \cap (X_{n+1} = k)\big) = \frac{1}{2} P(X_n = k-1)$$

ii. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrons par récurrence la proposition

$$P(X_n = k) = \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1)$$

- Comme $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \frac{1}{2}) = B\big(\frac{1}{2}\big) = B(2pq)$, la proposition $\mathcal{P}_2$ est vraie.
- Supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Alors, il résulte de la formule de Pascal que

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = k) &= P((X_n = k) \cap (X_{n+1} = k)) + P((X_n = k-1) \cap (X_{n+1} = k)) \\
&= \tfrac{1}{2} P(X_n = k) + \tfrac{1}{2} P(X_n = k-1) \\
&= \tfrac{1}{2} \tbinom{n-1}{k} \tfrac{1}{2^{n-1}} + \tfrac{1}{2} \tbinom{n-1}{k-1} \tfrac{1}{2^{n-1}} \\
&= \tfrac{1}{2^n} \left(\tbinom{n-1}{k} + \tbinom{n-1}{k-1} \right) \\
&= \tfrac{1}{2^n} \tbinom{n}{k}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $k = 0$, le résultat de la question 2.a.ii donne que

$$P(X_{n+1} = 0) = p^{n+1} + q^{n+1} = 2 \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2^n} = \binom{n}{0} \frac{1}{2^n}$$

En particulier, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, pour $n \geqslant 2$, la variable X_n suit la loi $\mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})$ lorsque $p = q = \frac{1}{2}$.