DEVOIR SURVEILLE 6

EXO 1

On considère l'application f qui à tout élément de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme

$$f(P) = (X-1)P' - P$$

1. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Ecrire la matrice de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$. f est il bijectif ?
3. Déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f
4. Déterminer une base de l'image de f
5. On considère l'application $f^2 = f \circ f$.
   a. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$
   b. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$
   c. Ecrire la matrice de f^2 dans la base B
   d. Déterminer le noyau de f^2

EXO 2

On veillera à bien transformer les identités fonctionnelles en égalités avec des x.
Pour chaque application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit une fonction $g = \Phi(f)$ via

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application $k : x \mapsto 2xg(x)$ est dérivable en 0. En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β (que l'on determinera) tels que

$$k(x) = \alpha + \beta x + o_0(x)$$

2. En déduire que l'application g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que g est paire et que

$$g(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(xu)\mathrm{d}u \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Donner une expression simple de g dans le cas où f est impaire et dans le cas où f est paire.
5. Montrer que $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ définit un endomorphisme de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
6. Déterminer $\ker \Phi$. L'endomorphisme Φ est il surjectif ?
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi(f) = \lambda f$.
   a. Montrer que f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que

$$\lambda x f'(x) = (1-\lambda)f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   b. Montrer que la fonction $h(x) = f(x)\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|}$ est constante sur $\mathbb{R}^*$
   c. En déduire $\ker(\Phi - \lambda \mathrm{Id})$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

EXO 3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (3x - 11y - 8z, 3x - 15y - 12z, 3x - 13y - 10z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f

EXO 4

On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée. On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages. On a donc $X_1 = 1$ et par exemple, si les premiers tirages donnent 2,2,1,2,1,4,3 alors on a : $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, $X_5 = 2$, $X_6 = 3$, $X_7 = 4$.

On pose $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.
   b. Calculer $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
   c. Tracer la courbe représentative de la fonction F de répartition de X_2.
2. a. Déterminer U_1
   b. Préciser l'ensemble des valeurs prises par X_n
   c. Etablir pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation $U_{n+1} = AU_n$.
3. On considère les quatres matrices

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a. Etablir par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation

$$U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$$

   b. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_n.
4. a. Calculer la valeur de $E(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
   b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$. Commenter.

EXO 5

Pour ceux qui ne le connaissent pas, on rappelle que $\mathrm{e}^u = 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+o_0(u^4)$ et l'on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

PARTIE 1

1. Montrer que f est continue en $[0, +\infty[$
2. a. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis déterminer une fonction φ telle que

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2} \qquad (x > 0)$$

   b. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

   c. Etudier les variations de φ. En déduire le tableau de variation de f qui sera complété par sa limite en $+\infty$.

PARTIE 2

On introduit la suite u définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $u_n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(n+1)$. Donner la limite de la suite u.
2. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.
3. A l'aide du changement de variable $u = nx$, établir que

$$0 \leqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - u_n \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

4. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.