CORRECTION DEVOIR SURVEILLE 6

EXO 1

1.
   - $\mathbb{R}_3[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (et on a le même au départ et à l'arrivée)
   - Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $(X-1) \in \mathbb{R}_1[X]$ et $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ de sorte que $(X-1)P' \in \mathbb{R}_3[X]$ et par suite $(X-1)P'-P \in \mathbb{R}_3[X]$. En particulier, f est une application
   - Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a

   $$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (X-1)(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q) \\ &= (X-1)(\lambda P' + \mu Q') - (\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda\left((X-1)P' - P\right) + \mu\left((X-1)Q' - Q\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

     A fortiori, f est $\mathbb{R}$-linéaire

   En conclusion, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On a

   $$\begin{aligned} f(1) &= (X-1)\times 0 - 1 = -1 \\ f(X) &= (X-1)\times 1 - X = -1 \\ f(X^2) &= (X-1)\times 2X - X^2 = X^2 - 2X \\ f(X^3) &= (X-1)\times 3X^2 - X^3 = 2X^3 - 3X^2 \end{aligned}$$

   En particulier, on a $\mathcal{M}at_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas inversible, car c'est une matrice triangulaire supérieure avec au moins un coefficient nul sur la diagonale principale, l'application linéaire associée f n'est donc pas bijective.
3. Le rang de la matrice est clairement 3 (calcul trivial). De sorte que le noyau de f est de dimension au plus 1, d'après le théorème du rang. Comme $f(1) = f(X)$, par linéarité, il vient $f(X-1) = 0$ de sorte que $X-1 \in \ker(f)$. A fortiori, on a $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X-1)$. *on peut également trouver le noyau de f en résolvant l'équation polynomiale $f(P) = 0 \iff (X-1)P' - P = 0$, mais c'est lourd et pénible si on si prend mal (poser un polynome de degré au plus trois et système). Via le terme dominant d'une solution non nulle P, on remarque que P est forcément de degré 1)*
4. Déterminer une base de l'image de f
5. D'après la question précédente, l'image de f est de dimenson 3 (calcul du rang). Et d'après les calculs effectués lors de la recherche de la matrice de f, il vient $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(-1, X^2-2X, 2X^3-3x^2)$ (cette famille génératrice est libre, car échelonnée en degré)
   a. Montrons que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ *(via la méthode MARRE).*
   Soit $x \in \ker(f)$c *(et montrons que $x \in \ker(f^2)$).* Alors $f(x) = 0$, de sorte que $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ (linéarité de f) et donc $x \in \ker(f^2)$. CQFD
   b. Montrons que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ *via la méthode MARRE*
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$ *(et montrons que $y \in Im(f)$).* Alors, il existe $x \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $y = f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x))$. En posant $x' = f(x)$, nous remarquons alors que $x' \in \mathbb{R}_3[X]$ et que $y = f(x')$ de sorte que $y \in \mathrm{Im}(f)$. CQFD

c. On sait que

$$\mathcal{M}at_B(f^2) = \mathcal{M}at_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut également déduire des calculs effectués à la question 2 que

$$\begin{aligned} f^2(1) &= f(f(1)) = f(-1) = -f(1) = 1 \\ f^2(X) &= f(f(X)) = f(-1) = 1 \\ f^2(X^2) &= f(f(X^2)) = f(X^2 - 2X) = f(X^2) - 2f(X) = X^2 - 2X + 2 \\ f(X^3) &= f(f(X^3)) = f(2X^3 - 3X^2) = 2f(X^3) - 3f(X^2) \\ &= 2(2X^3 - 3X^2) - 3(X^2 - 2X) = 4X^3 - 9X^2 + 6 \end{aligned}$$

Et on en déduit la matrice de f^2, par le procédé habituel.

d. La matrice de f^2 est de rang 3 (calcul, base $f^2(X)$, $f^2(X^2)$, $f^2(X^3)$ échelonnée en degré de l'image) Et comme $f^2(1) = f^2(X)$ nous remarquons que $f^2(X-1) = 0$ et donc que $X - 1 \in \mathrm{Ker}(f^2)$ de sorte que, le noyau de f^2, qui est de dimension au plus 1 d'après le théorème du rang, satisfait

$$\ker(f^2) = \mathrm{Vect}(X-1)$$

Ceci dit, il est beaucoup plus malin et rapide d'utiliser le résultat des 3 et question 5a ainsi que la dimension pour écrire que

$$Vect(X-1) = \ker f \subset \ker f^2$$

et $\dim \ker f^2 = 1$ *donc nécéssairement* $\ker(f^2) = Vect(X-1)$

EXO 2

On veillera à bien transformer les identités fonctionnelles en égalités avec des x.
Pour chaque application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit une fonction $g = \Phi(f)$ via

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & x = 0 \end{cases}$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous remarquons (vrai aussi pour $x = 0$) que

$$k(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(-x),$$

en posant $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$. Comme F est l'unique primitive sur $\mathbb{R}$, s'annulant en 0, de l'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et satisfait évidemment $F'(x) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. A fortiori, l' application $x \mapsto F(-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et l'application $k : x \mapsto F(x) - F(-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. En conclusion, la fonction k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$et on a

$$k'(x) = F'(x) - (F(-x))' = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

A fortiori, la fonction k est dérivable en 0 et A fortiori, on a $k'(0) = f(0) + f(-0) = 2f(0)$. La fonction k étant dérivable en 0, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = k'(0)$$

Ce qui peut s'écrire, via les développement limités *(on a bien insisté la dessus, hein)*

$$\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = k'(0) + o_0(1)$$

En changeant les termes de place, il vient

$$k(x) = k(0) + x(k'(0) + o_0(1)) = k(0) + k'(0)x + o_0(x)$$

Et, en remarquant que $k(0) = 0$ et $k'(0) = 2f(0)$, il vient

$$k(x) = 2f(0)x + o_0(x)$$

Autrement dit $\alpha = 0$ et $\beta = 2f(0)$ *OK, j'aurais pu/du découper cette question en 2, je la compterai sur 8 points lors de la correction. Ceci dit, la question 1 a été rajoutée (pour vous aider) par rapport au sujet original...*

2.
   a. Il résulte des calculs effectués à la question précédente que l'application k est continue sur $\mathbb{R}$. A fortiori, la fonction $g : x \mapsto \frac{k(x)}{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctons continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
   b. De plus, en 0, il résulte de l'éstimation précédemment obtenue que

$$g(x) = \frac{k(x)}{2x} = \frac{2f(0)x + o_0(x)}{2x} = f(0) + o_0(1)$$

   De sorte que $\lim_{x \to 0} g(x) = f(0) = g(0)$. En particulier, la fonction g est bien continue en 0

En conclusion, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ *Remarque : que cela soit dans la question 1 ou dans la question 2, il faut faire intervenir le théorème permettant de dériver les intégrales du type $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, il n'est pas raisonnable de ne pas savoir faire cela...*

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous remarquons que

$$g(-x) = \frac{1}{-2x} \int_x^{-x} f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2x} \times \left(- \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t \right) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = g(x)$$

En particulier, la fonction g est paire sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \neq 0$, nous procédons au changement de variable $t = xu$ *il est affine, j'étais pas obligé de vous le donner, héhé* en remarquant que

   a. l'application $u \mapsto xu$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[-1,1]$ dans $[-x,x]$
   b. l'application $t \mapsto f(t)$ est continue sur l'intervalle $[-x,x]$ A fortiori, nous obtenons que

$$g(x)=\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2x}\int_{-1}^{1}f(xu)x\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(xu)\mathrm{d}u \qquad (x\neq 0)$$

Bon, comme $\int_{-1}^{1}f(0)\mathrm{d}u=2f(0)$ et comme $g(0)=f(0)$, la formule ci dessus est également vraie pour $x=0$. De sorte que

$$g(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(xu)\mathrm{d}u \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

c. • Lorsque f est impaire, nous déduisons de la relation précédente et de la parité de g que

$$g(x)=g(-x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(-xu)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}-f(xu)\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(xu)\mathrm{d}u=-g(x)$$

De sorte que $2g(x)=0$ et par suite

$$g(x)=0 \quad (x\in\mathbb{R}).$$

forcément, on intégre une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0...
On aurait aussi pu prouver cette formule via le changement de variable standard $t=-u$ dans la définition de g, mais la nouvelle formule obtenue pour g (également par cdv) permet de l'éviter

- Lorsque f est paire, on déduit de la parité de f et de la relation de Chasles que

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}f(xu)\mathrm{d}u\right)=\tfrac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}f(xu)\mathrm{d}u+\tfrac{1}{2}\left(\int_{0}^{1}f(xu)\mathrm{d}u\right)\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\int_{0}^{1}f(xu)\mathrm{d}u\right)+\tfrac{1}{2}\left(\int_{0}^{1}f(xu)\mathrm{d}u\right)\\ &= \int_{0}^{1}f(xu)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

l'intégrale du coté gauche est égale à l'intégrale du coté droit par parité, normalement, on démontre cela dans le cours via le changement de variable standard $t=-u$ mais je pense que le poseur de sujet souhaite éviter ici de nouveaux changements de variable et prône la démonstration précédente

- • $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence (le même au départ et à l'arrivée)
  - Pour $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$, la fonction $\Phi(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question 2. A fortiori, $\Phi(f)\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et Φ est une application
  - Soient $(f,j)\in\mathcal{C}(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Alors la fonction $\Phi(\lambda f+\mu g)$ est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et vérifie

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f+\mu g)(0) &= (\lambda f+\mu g)(0)=\lambda f(0)+\mu g(0)\\ &= \lambda\Phi(f)(0)+\mu\Phi(g)(0)=(\lambda\Phi(f)+\mu\Phi(g))(0)\\ \Phi(\lambda f+\mu g)(x) &= \tfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x}(\lambda f+\mu g)(t)\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x}\left(\lambda f(t)+\mu g(t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\cdot\tfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t+\mu\cdot\tfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x}g(t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\cdot\Phi(f)(x)+\mu\cdot\Phi(g)(x)=\left(\lambda\cdot\Phi(f)+\mu\cdot\Phi(g)\right)(x) \qquad (x\neq 0) \end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons l'égalité fonctionnelle $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot \Phi(f) + \mu \cdot \Phi(g)$. Et l'application Φ est donc linéaire *chaud !! je mettrai cette question sur 6 (linéarité sur 4). Les EVS avec les fonctions, c'est plus dur à cause des identités fonctionnelles, qu'il faut traduire*

En conclusion, $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ définit un endomorphisme de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

- On peut déja remarquer que les fonctions continues impaires sont dans le noyau de $\ker \Phi$, d'après le résultat de la question 4. Soit $f \in \ker(\Phi)$. Alors $g = \Phi(f)$ est la fonction nulle ($g = 0$), de sorte que $f(0) = 0$ et

$$\frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

En multipliant par $2x$, il vient

$$k(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

En dérivant cette intégrale par rapport à x (on a montré à la question 1 comment faire), il suit

$$0 = k'(x) = f(x) + f(-x) \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

Cette formule étant vraie aussi en $x = 0$ car $f(0) = 0$. En particulier, nous remarquons que

$$f(-x) = -f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La fonction f est donc continue et impaire. A fortiori, nous avons prouvé que $\ker(\Phi) \subset \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \text{ impaire}\}$. Comme nous avons remarqué également que $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \text{ impaire}\} \subset \ker(\Phi)$, nous concluons que

$$\ker(\Phi) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \text{ impaire}\}$$

Comme nous travaillons dans un espace de fonctions de dimension infinie, tout est plus dur (et plus théorique)... L'endomorphisme Φ ne peut pas être surjectif car $\Phi(f)$ est (toujours) une fonction paire. En particulier, on a

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \neq \mathrm{Im}(\Phi) \subset \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \text{ paire}\}$$

C'est dur mais cela peut être court et rapporter gros

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi(f) = \lambda f$.
  - - Comme $\Phi(f)$ est une fonction paire d'après le résultat de la question 3 et comme $f = \frac{1}{\lambda} \cdot \Phi(f)$, la fonction f est paire.
    - A la question 1, nous avions montré que k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de sorte que $g = \Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme $f = \frac{1}{\lambda} \cdot \Phi(f)$, la fonction f est alors dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
    - Pour $x \neq 0$, dérivons la relation $\lambda f = \Phi(f) = \frac{k(x)}{2x}$ (toujours des dérivées d'intégrales) pour trouver que

$$\begin{aligned}\lambda f'(x) &= \left(\frac{k(x)}{2x}\right)' = \frac{k'(x)\times 2x - 2k(x)}{4x^2}\\ &= \frac{\big(f(x)+f(-x)\big)\times 2x - 2k(x)}{4x^2}\end{aligned}$$

On déduit alors de la parité de f et de la relation $k(x) = 2x \times g(x) = 2x \times \Phi(f)(x) = 2x \times \lambda f(x)$

$$\begin{aligned}\lambda f'(x) &= \frac{2f(x)\times 2x - 2k(x)}{4x^2} = \frac{4xf(x)-2k(x)}{4x^2}\\ &= \frac{4xf(x) - 2\times 2x\lambda f(x)}{4x^2} = \frac{f(x)-\lambda f(x)}{x} = (1-\lambda)\frac{f(x)}{x}\end{aligned}$$

En particulier, il vient

$$x\lambda f'(x) = (1-\lambda) f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

Mais comme $\lambda f(0) = \Phi(f)(0) = f(0)$ on remarque que $(1-\lambda)f(0) = 0$ et par suite que la relation précédente est également vérifiée pour $x = 0$.

- La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit (et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, l'application $x \mapsto \ln|x|$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, de dérivée $\frac{1}{x}$). En dérivant, on obtient alors pour $x \in \mathbb{R}^*$ que

$$\begin{aligned}h'(x) &= \left(f(x)\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|}\right)' = f'(x)\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|} + f(x)\times\left(\tfrac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|\right)'\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|}\\ &= \left(f'(x) + f(x)\tfrac{\lambda-1}{\lambda}\tfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|}\end{aligned}$$

Il résulte alors de la formule $x\lambda f'(x) = (1-\lambda)f(x)$ que $f'(x) + f(x)\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{x} = 0$ et par suite que $h'(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction h est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. Mais comme $h(1) = f(1) = h(-1)$ nous obtenons que cette constante est égale à $f(1)$ pour les deux intervalles, de sorte que

$$h(x) = f(1) \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

Autrement dit, la fonction est constante sur $\mathbb{R}^*$.

- Lorsque $\lambda = 0$, il résulte du résultat de la question 6 que

$$\ker(\Phi - \lambda \mathrm{Id}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \text{ impaire}\}$$

Lorsque $\lambda \neq 0$ et $f \in \ker(\Phi - \lambda\mathrm{Id})$, nous avons $0 = (\Phi - \lambda\mathrm{Id})(f) = \Phi(f) - \lambda f$, de sorte que $\Phi(f) = \lambda f$. Il résulte alors des questions précédentes que

$$f(x)\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|} = h(x) = f(1) \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

De sorte que

$$f(x) = f(1)\mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|} \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

On a alors plusieurs cas

- Si $\frac{\lambda-1}{\lambda} = 0$, c'est à dire si $\lambda = 1$, la fonction f est constante et on peut montrer facilement qu'une constante c vérifie $c = \Phi(c)$ car

$$\Phi(c)(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} c\mathrm{d}t = \frac{1}{2x} \times c2x = c \qquad (x > 0)$$

A fortiori, dans ce cas, on a $\ker(\Phi - \lambda\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1)$

- Si $\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0$, c'est à dire si $\lambda > 1$ ou $\lambda < 0$, alors, en faisant tendre x vers 0^+ dans la relation précédente, on obtient que l'on a nécessairement $f(1) = 0$ (sinon, il n'y aurait pas de limite à dorite ce qui contredirait la continuité de f en 0) et $f(0) = 0$

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(1)\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\overbrace{\ln|x|}^{\to-\infty}}}_{\to+\infty}$$

A fortiori, la fonction f est identiquement nulle, ce qui prouve que $\ker(\Phi - \lambda\mathrm{Id}) = \{0\}$

- Si $\frac{\lambda-1}{\lambda} < 0$, on remarque que

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\overbrace{\ln|x|}^{\to-\infty}} = 0$$

De sorte que la fonction d définie par

$$d(x) = \begin{cases} \alpha\mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln|x|} = |x|^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (prolongement par continuité), paire et vérifie la relation $\Phi(d) = \lambda d$ comme on peut le vérifier en intégrant

$$\begin{aligned}\Phi(d)(x) &= \tfrac{1}{2x}\textstyle\int_{-x}^{x} d(t)\mathrm{d}t = \int 0^1 d(xu)\mathrm{d}u = \int 0^1 (xu)^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}}\mathrm{d}u \\ &= x^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}} \textstyle\int 0^1 u^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}}\mathrm{d}u = x^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}}\left[\frac{u^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}+1}}{-\frac{\lambda-1}{\lambda}+1}\right]_0^1 \\ &= x^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}}\frac{1}{-\frac{\lambda-1}{\lambda}+1} = \lambda d(x) \qquad (x > 0)\end{aligned}$$

Ouah... A fortiori, on a dans ce cas $\ker(\Phi - \lambda\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(d)$

Trouver des noyaux paramétrés par un λ dans un espace de fonctions de dimension infinie, il ne doit pas y avoir eu baucoup d'étudiants pour être allés au bout de cet exercice en concours... (mieux vaut la passer, hein)

EXO 3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (3x - 11y - 8z, 3x - 15y - 12z, 3x - 13y - 10z)$$

- - $\mathbb{R}_3[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (même au départ et à l'arrivée)
  - Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a $3x - 11y - 8z \in \mathbb{R}$, $3x - 15y - 12z \in \mathbb{R}$ et $3x - 13y - 10z \in \mathbb{R}$ de sorte que $f(x,y,z)$ existe et appartient à $\mathbb{R}^3$. En particulier, f est une application.
  - Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned} & f\big(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')\big) \\ = \; & f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ = \; & \big(3(\lambda x + \mu x') - 11(\lambda y + \mu y') - 8(\lambda z + \mu z'), 3(\lambda x + \mu x') - 15(\lambda y + \mu y') - 12(\lambda z + \\ = \; & \lambda\big(3x - 11y - 8z, 3x - 15y - 12z, 3x - 13y - 10z)\big) + \mu\big(3x' - 11y' - 8z', 3x' - 15y \\ = \; & \lambda f(x,y,z) + \mu f(x',y',z') \end{aligned}$$

    En particulier, f est linéaire

  En conclusion f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Nous remarquons que

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (3,3,3) \\ f(0,1,0) &= (-11,-15,-13) \\ f(0,0,1) &= (-8,-12,-10) \end{aligned}$$

  A fortiori, la matrice de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathcal{M}at_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -11 & -8 \\ 3 & -15 & -12 \\ 3 & -13 & -10 \end{pmatrix}$$

- Un calcul rapide de rang donne

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & -11 & -8 \\ 3 & -15 & -12 \\ 3 & -13 & -10 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -11 & -4 \\ 1 & -15 & -6 \\ 1 & -13 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -11 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

  A fortiori, $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ et il résulte du théorème du rang que $\dim \ker f = 1$ En particulier, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(h(1,0,0), h(0,1,0)) = \mathrm{Vect}\big((3,3,3), (-11,-15,-13)\big)$ et comme $h(1,1,-1) = (3-11+8, 3-15+12, 3-13+10) = (0,0,0)$, nous remarquons d'une part que $(1,1,-1) \in \ker h$ et d'autre part que $\ker h = \mathrm{Vect}((1,1,-1))$

EXO 4

On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée. On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages. On a donc $X_1 = 1$ et par exemple, si les premiers tirages donnent 2,2,1,2,1,4,3 alors on a : $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, $X_5 = 2$, $X_6 = 3$, $X_7 = 4$.

On pose $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- ◦ X_2 est le nombre de numéros distincts obtenus en 2 tirage. Soit on obtient deux fois le même numéro, auquel cas $X_2 = 1$, soit on obtient au second tour un numéro distinct de celui obtenu au premier tour, auquel cas ;$X_2 = 2$. Pour le calcul, tout dépend du second tirage : on a 1 chance sur 4 de retomber sur la boule précédemment tirée (équiprobabilité) de sorte que $P(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(X_2 = 2)\frac{3}{3}$.

  ◦

  $$\begin{aligned} E(X_2) &= 1 \times P(X_2 = 1) + 2 \times P(X_2 = 2) = 1 \times \tfrac{1}{4} + 2 \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{4} \\ V(X_2) &= E(X_2^2) - E(X_2)^2 = (1^2 \times P(X_2 = 1) + 2^2 \times P(X_2 = 2)) - \left(\tfrac{7}{4}\right)^2 \\ &= 1 \times \tfrac{1}{4} + 4 \times \tfrac{3}{4} - \tfrac{49}{4^2} = \tfrac{13 \times 4 - 49}{4^2} = \tfrac{3}{16} \end{aligned}$$

  ◦ Trop compliqué de dactylographier une courbe, alors je la décris :

  $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

-

  ◦ Comme $X_1 = 1$ (loi certaine), on a $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  ◦ On a $X_1(\Omega) = \{1\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2\}$, $X_3(\Omega) = \{1,2,3\}$ et $X_n(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ pour $n \geqslant 4$.

  ◦ En notant L_k la ligne k de la matrice A et en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{X_n = 1, X_n = 2, X_n = 3, X_n = 4\}$ nous obtenons que

  $$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P_{X_n=1}(X_{n+1} = k) \times P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = k) \times P(X_n = 2) \\ &= \big(P_{X_n=1}(X_{n+1} = k) \quad P_{X_n=2}(X_{n+1} = k) \quad P_{X_n=3}(X_{n+1} = k) \quad P_{X_n=} \\ &= L_k \times U_n \end{aligned}$$

  En faisant varier k dans $[\![1,4]\!]$ et en regroupant les relations obtenues dans un vecteur colonne, cela nous donne la relation

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \\ P(X_{n+1}=3) \\ P(X_{n+1}=4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \times U_n \\
&= A \times U_n
\end{aligned}
$$

A fortiori, nous avons prouvé la relation $U_{n+1} = AU_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- On considère les quatres matrices

$$
V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

  - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établissons par récurrence,la relation

$$
\mathcal{P}_n : \qquad U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4
$$

    - $\mathcal{P}_1$ est vraie car $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$
\begin{aligned}
&\left(\tfrac{1}{4}\right)^0 V_1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 V_2 + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^0 V_3 + V_4 = V_1 + 3V_2 + 3V_3 + V_4 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+0+0+0 \\ -3+3\times 1+0+0 \\ 3-2\times 3+3\times 1+0 \\ -1+3\times 1+3\times(-1)+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

    - Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geqslant 1$ (et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$). Il résulte de l'égalité établie à la proposition précédente et de la proposition $\mathcal{P}_n$ que

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= AU_n = A\left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} AV_1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} AV_2 + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} AV_3 + AV_4
\end{aligned}
$$

    En remarquant que

$$
\begin{aligned}
AV_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\times 1 \\ \frac{3}{4}\times 1+\frac{1}{2}\times(-3) \\ \frac{1}{2}\times(-3)\times+\frac{3}{4}\times 3 \\ \frac{1}{4}\times 3+1\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}V_1 \\
AV_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\times 0 \\ \frac{3}{4}\times 0+\frac{1}{2}\times 1 \\ \frac{1}{2}\times 1\times+\frac{3}{4}\times(-2) \\ \frac{1}{4}\times(-2)+1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}V_2 \\
AV_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\times 0 \\ \frac{3}{4}\times 0+\frac{1}{2}\times 0 \\ \frac{1}{2}\times 0\times+\frac{3}{4}\times 1 \\ \frac{1}{4}\times 1+1\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix} = \frac{3}{4}V_3 \\
AV_4 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\times 0 \\ \frac{3}{4}\times 0+\frac{1}{2}\times 0 \\ \frac{1}{2}\times 0\times+\frac{3}{4}\times 0 \\ \frac{1}{4}\times 0+1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V_4
\end{aligned}
$$

En reportant ces égalités dans la relation précédemment obtenue, il vient alors

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} AV_1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} AV_2 + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} AV_3 + AV_4 \\
&= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \tfrac{1}{4}V_1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \tfrac{1}{2}V_2 + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} \tfrac{3}{4}V_3 + V_4 \\
&= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} V_1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} V_2 + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} V_3 + V_4
\end{aligned}
$$

En particulier, la relation $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai

La relation $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la relation précédente, nous avons (qu'est ce que c'est bourrin... :/)

$$
\begin{aligned}
U_n &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4 \\
&= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \\ -3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} - 2\times 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} \\ -\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

En particulier, nous en déduisons la loi de X_n puisque

$$
U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \\ P(X_n=4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \\ -3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} - 2\times 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} \\ -\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} + 1 \end{pmatrix}
$$

- ◦ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Il résulte de la loi obtenue précédemment que

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) + 4 \times P(X_n = 4) \\ &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 2\left(-3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + 3\left(3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} - 2 \times 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 3\left(\tfrac{3}{4}\right)\right. \end{aligned}$$

  ◦ En passant à la limite dans la relation précédente (toutes les puissances de nombre du dype a^n avec $0 \leqslant a < 1$ tendent vers 0), on obtient que $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = 4 \times 1 = 4$. Forcémment, on peut s'attendre à obtenir 4 chiffres différents si on fait suffisamment de tirages avec le procédé décrit... (et si on fait une infinité de tirages, cela doit être presque sûr. Mieux encore : c'est presque surement presque sûr)

EXO 5

Pour ceux qui ne le connaissent pas, on rappelle que $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + o_0(u^4)$ et l'on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

PARTIE 1

- • L'application $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. de même que $x \mapsto x$. A fortiori, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

  • Par ailleurs, en 0 un calcul de DL à l'ordre 1 pour $u = x$ donne que

$$f(x) = \frac{1 - \big(1 + (-x) + o_0(x)\big)}{x} = \frac{x + o_0(x)}{x} = 1 + o_0(1)$$

  En particulier, on a $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ de sorte que f est continue en 0

  En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}^+$

- ◦ De même, f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc dérivable) sur $]0, +\infty[$ et de plus, on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}x - 1(1 - \mathrm{e}^{-x})}{x^2} = \frac{-1 + \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2} \qquad (x > 0)$$

  Avec $\varphi(x) = -1 + \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$ pour $x > 0$.

  ◦ Procédons à la limite du taux d'accroissement, assaisoné pour $u = -x$, d'un bon petit DL aux petits oignons d'ordre 2

$$\begin{aligned} \tfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \tfrac{\frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} - 1}{x} = \tfrac{1 - x - \mathrm{e}^{-x}}{x^2} \\ &= \tfrac{1 - x - \left(1 - x + (-x)^2 + o_0(x^2)\right)}{x^2} = \tfrac{-x^2 + o_0(x^2)}{x^2} = -1 + o_0(1) \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0^+$, nous remarquons alors que f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$

- ○ La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ (idem) et on a

$$\varphi'(x) = (-1+\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} \leqslant 0 \qquad (x \in \mathbb{R}+)$$

Dur dur les tableau de variation dactylographiés, donc je le décrit : φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -1$, via le théorème de croissance comparée. à fortiori, φ est strictement négative sur $\mathbb{R}_*$ (négative sur $\mathbb{R}^+$ et f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ avec $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

PARTIE 2

Ah enfin, un peu de finesse et de beauté ! On introduit la suite u définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant u \leqslant n$. Comme $-1 \leqslant -\frac{u}{n} \leqslant 0$, la croisance de l'exponentielle induisent que $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{u}{n}} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1$ et par suite que

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{1+u} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}}{1+u} \leqslant \frac{1}{1+u} \qquad (0 \leqslant u \leqslant n).$$

En intégrant cette relation sur l'intervalle $[0,n]$, il résulte de la croissance de l'intégrale que

$$\frac{\ln(n+1)}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left[\ln(1+u)\right]_0^n = \int_0^n \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u = u_n$$

$$\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u = u_n \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u = \left[\ln(1+u)\right]_0^n = \ln(n+1) \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

En particulier, nous avons obtenu que $u_n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(n+1)$. Comme le terme de droite diverge vers $+\infty$, il en est de même pour la suite u.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ existe car la fonction f est continue sur le segment $[0,n]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisqu'elle l'est sur $\mathbb{R}^+$ d'après le résultat de la question 1.
- Commençons par remarquer que

$$\int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{\frac{-u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_0^n \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{-u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u$$

En procédant au changement de variable $u = nx$,

- l'application $x \mapsto nx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[0,n]$
- l'application $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{-u}{n}}}{1+u}$ est continue sur $[0,n]$

Il vient

$$\int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - u_n = \int_0^n \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{-u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+nx} n\mathrm{d}x$$

Comme $0 \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+nx}$ et comme $\frac{n}{1+nx} \leqslant \frac{1}{x}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, il rsulte alors de la croissance de l'intégrale que

$$0 = \int_0^1 0\mathrm{d}u \leqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

- Comme l'inégalité précédente induit que

$$0 = \int_0^1 0\mathrm{d}u \leqslant \underbrace{[\ln(1+u)]_0^n}_{\ln(n+1)} - u_n \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

En divisant par $\ln(n+1)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ nous obtenons que

$$\lim \left(1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)}\right) = 0$$

En particulier, nous prouvons que $u_n \sim \ln(n+1) \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.