DEVOIR SURVEILLE 7

EXO 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage et on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : pour $n = 10$, si 2, 4, 1, 5, 9 sont les numéros obtenus aux cinq premiers tirages, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. a. Déterminer $T_n(\Omega)$
   b. Calculer $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$
3. Dans cette question $n = 2$. Donner la loi de T_2
4. Dans cette question $n = 3$. Donner la loi de T_3. Calculer $E(T_3)$

Partie B

1. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
2. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$.
   a. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}
   b. En utilisant un système complet d'événements lié à S_k, montrer que

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \qquad (k+1 \leqslant i \leqslant n)$$

3. a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule liant $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
   b. En déduire que $\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant i-1$
   c. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, démontrer par récurrence la proposition $\mathcal{H}_k$ définie par

$$\mathcal{H}_k : \qquad \forall i \in [\![k,n]\!], P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$$

4. a. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Comparer les événements $(T_n > k)$ et $(S_k \leqslant n-1)$
   b. En déduire que $P(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$
5. Démontrer que $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$ puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$
6. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la suite de variable $(T_n)_{n\geq 1}$.

1. Soit Y la variable aléatoire définie par $P(Y=k) = \dfrac{k-1}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   a. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k) = 1$.

   b. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}$

3. Démontrer que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y, c'est à dire que

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = P(Y=k) \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$$

EXO 2

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$ et que si les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.

On s'intéresse à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$.

   a. Rappeler les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $\frac{1}{1+x}$

   b. Montrer que $w_{n+1} - w_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$

   c. Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un nombre réel γ, appelé constante d'Euler, que l'on ne cherchera pas à calculer.

2. Etudier les variations de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser son tableau de variations en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour $n \geqslant 1$.

   a. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

   b. En déduire que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2}$ pour $n \geqslant 1$.

   a. Pour $n \geqslant 3$, justifier que $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$

   b. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$ pour $a > 0$ et $b > 0$.

   c. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et minorée. Qu'en déduire ?

5. Soit $n \geqslant 1$. En remarquant que

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k=2\ell}} u_k + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k=2\ell+1}} u_k,$$

montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_{2n} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = 2 \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(2\ell)}{2\ell}$$

puis que

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$

6. Démontrer alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

EXO 3 extrait de EML lyon 2018

Soit $n \geqslant 2$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP$$

1. a. Montrer que $P \mapsto \varphi(P)$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$
   b. Calculer $\varphi(X^n)$.
   c. Montrer que $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Préciser le rang de cette matrice.
3. a. L'endomorphisme φ est il injectif ? Justifier votre réponse.
   b. Soit P un polynôme non nul de $\ker(\varphi)$. Montrer que P admet 1 comme unique racine (dans $\mathbb{C}$) et que P est de degré n.
   c. En déduire une base de $\ker(\varphi)$
   d. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Calculer $\varphi(P_k)$.
   e. Montrer que la famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et expliciter la matrice de φ dans cette base.