CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 7

EXO 1

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (équiprobabilité du tirage des n boules). De sorte que $E(X_k) = \frac{n+1}{2}$
2. a. Il faut au plus n tirages (n un) pour obtenir une somme supérieure ou égale à n et au moins un tirage (un n), les nombres intermédiaires sont également possibles donc $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$

   b. $P(T_n = 1) = \frac{1}{n}$ (probabilité de tirer la boule n au premier tour)
   $P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ (probabilité de tirer 1 au $n-1$ premiers tirages + indépendance mutuelle des tirages avec remise)
3. Soit $n = 2$. La VAR T_2 prend la valeur 1 si la première boule tirée n'est pas la boule 1 et prend la valeur 2 sinon. D'après 2b, on a $P(T_2 = 2) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(T_1 = 1) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$ De sorte que $T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}[\![1,2]\!]$.
4. Soit $n = 3$. D'après 2b, on a $P(T_3 = 1) = \frac{1}{3}$, $P(T_3 = 3) = \frac{1}{3^2}$ et par complémentarité

$$P(T_3 = 2) = 1 - P(T_3 = 1) - P(T_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

cela ne ressemble pas à une loi connue. En particulier, nous obtenons que

$$E(T_3) = 1 \times P(T_3 = 1) + 2 \times P(T_3 = 2) + 3 \times P(T_3 = 3) = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9}$$

Partie B

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $S_k(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs que l'on peut obtenir en sommant k entiers de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, on a

$$S_k(\Omega) = [\![k,kn]\!]$$

2. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$.

   a. $S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$

   b. Soit $i \in [\![k+1,n]\!]$. La formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements $\big(S_k = j)\big)_{k \leqslant j \leqslant kj}$ induit que

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{kn} P(S_k = j \cap S_{k+1} = i)$$

Comme l'événement $(S_k = j) \cap (S_{k+1} = i)$ n'est possible que si $1 \leqslant i - j$ et $k \leqslant j$ (d'ou $k \leqslant j \leqslant i - 1$) et qu'il vaut dans ce cas

$$(S_k = j) \cap (S_{k+1} = i) = (S_k = j) \cap (X_{k+1} = i - j)$$

Nous déduisons alors de l'indépendance de $X_k = i - j$ avec $S_k = j$ que

$$\begin{aligned}
P(S_{k+1}=i) &= \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k=j\cap X_{k+1}=i-j)\\
&= \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k=j)\underbrace{P(X_k=i-j)}_{1/n} = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k=j)
\end{aligned}$$

3. a. Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $j\in\mathbb{N}^*$, la formule de Pascal donne

$$\binom{j-1}{k-1}+\binom{j-1}{k}=\binom{j}{k}.$$

b. A fortiori, pour $1\leqslant k\leqslant i-1$, en reconnaissant une somme telescopique, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} &= \binom{k-1}{k-1}+\sum_{j=k+1}^{i-1}\binom{j-1}{k-1}\\
&= \binom{k-1}{k-1}+\sum_{j=k+1}^{i-1}\left(\binom{j}{k}-\binom{j-1}{k}\right)\\
&= 1+\sum_{j=k+1}^{i-1}\binom{j}{k}-\sum_{j'=k}^{i-2}\binom{j'}{k} \qquad \text{CDI } j'=j-1\\
&= 1+\binom{i-1}{k}-\binom{k}{k}=\binom{i-1}{k}
\end{aligned}$$

c. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, démontrons par récurrence la proposition $\mathcal{H}_k$

- $\mathcal{H}_1$ est vraie car $P(S_1=i)=P(B_1=i)=\frac{1}{n}=\frac{1}{n^1}\binom{i-1}{0}$ pour $1\leqslant i\leqslant n$
- Supposons $\mathcal{H}_k$ pour un entier $k\in[\![1,n-1]\!]$ *(récurrence finie)* et prouvons $\mathcal{H}_{k+1}$. D'après le résultat de la question 2a et $\mathcal{H}_k$, nous avons

$$\begin{aligned}
P(S_{k+1}=i) &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}P(S_k=j)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1}\\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1}=\frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k}\\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{(k+1)-1},
\end{aligned}$$

  d'après le résultat de la question 3b (et car $k\leqslant i\leqslant n$ et $k\leqslant j\leqslant n-1$). En particulier $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{H}_k$ est vraie pour $1\leqslant k\leqslant n$

4. a. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. On a trivialement $(T_n>k)=(S_k\leqslant n-1)$: Si le premier rang T_n pour lequel la somme des tirages est supérieur ou égal à n est au moins égale à k+1, alors nécéssairement la somme des tirages obtenues au cour des k premiers tirages est strictement inférieure à n (et réciproquement).

b. Pour $0\leqslant k\leqslant n$, Il résulte du résultat des trois questions précédentes que

$$
\begin{aligned}
P(T_n > k) &= P(S_k \leqslant n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} P(S_k = i) \\
&= 0 + \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) \qquad (P(S_k = i) = 0 \text{ si } i < k) \\
&= \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \qquad \text{résultat de 3c} \\
&= \frac{1}{n^k}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \qquad \text{résultat de 3b}
\end{aligned}
$$

5. Xomme $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$, nous remarquons que

$$
\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k \times P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k \times \big(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \qquad \text{CDI } k' = k-1 \\
&= \sum_{k'=0}^{n-1} (k'+1)P(T_n > k') - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\
&= P(T_n > 0) + \sum_{k'=1}^{n-1} (k'+1)P(T_n > k') - \sum_{k=1}^{n-1} kP(T_n > k) - \underbrace{nP(T_n > n)}_{0} \\
&= P(T_n > 0) + \sum_{k=1}^{n-1} P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \qquad \text{Bdn } (a+b)^{n-1} \text{ pour } a = 1 \text{ et } b = \frac{1}{n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

6. Via un développement limité, nous obtenons que

$$
\begin{aligned}
E(T_n) &= \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{(n-1)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{1+o(1)}
\end{aligned}
$$

De sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n) = \mathrm{e}$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la suite de variable $(T_n)_{n\geq 1}$.

1. Soit Y la variable aléatoire définie par $P(Y = k) = \dfrac{k-1}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   a. Nous déduisons de la définition de Y que

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 1 \qquad \text{CDV } k' = k-1" \\
&= \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{1}{k'!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 1 = 1
\end{aligned}
$$

b. *nous allons justifier la convergence absolue de la série et donc l'existence de l'esperance en fin de calcul (nos égalités deront justifiées).* En cas de convergence, nous avons

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{k-1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} k\frac{k-1}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} \qquad \text{CDV } k' = k-2 \\
&= \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{1}{k'!} = \mathrm{e}^0 = 1
\end{aligned}
$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule obtenue en 4b et d'après la formule

$$n^k \sim (n-1)(n-2)\cdots(n-k) = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}$$

(il y a bien k facteurs dans le produit de droite et $n \sim n-1$, $n \sim n-2$, , $n \sim (n-k)$), nous avons

$$P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \sim \frac{1}{n^k}$$

En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \dfrac{1}{k!}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Nous déduisons du résultat de la question précédente que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) &= \lim_{n\to+\infty} \left(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} P(T_n > k-1) - \lim_{n\to+\infty} P(T_n > k) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!} \\
&= P(Y=k)
\end{aligned}
$$

EXO 2

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$ et que si les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.

On s'intéresse à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$.

   a. D'après le cours

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o_0(u^2)$$

   De sorte que pour $u = -x$,il vient

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o_0(x^2)$$

   b. En particulier, nous obtenons que

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n \quad &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\ &\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \big(\ln(n+1) - \ln b \big) \\ &\frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln b \big) \\ &\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+1/n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{Factoriser le terme dominant} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

   c. La série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge car elle a la même nature que la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ qui est une série de Riemann convergeante ($\alpha = 2 > 1$). En effet l'équivalent obtenu est de signe constant (strictement négatif au voisinage de l'infini). A fortioti sa suite des sommes partielles converge vers un nombre réel. Or, on a

$$w_1 + \sum_{k=1^n-1} (w_{k+1} - w_k) = w_n \qquad (n \geqslant 1)$$

   A fortiori, la suite (w_n), qui est égale à cette suite des sommes partielles (à une constante près), est convergeante également. On a donc

$$w_n = \gamma + o(1)$$

2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et de plus

$$f'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \qquad (x > 0).$$

En particulier, comme $1 - \ln(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$ et $1 - \ln(x) > 0 \iff x < \mathrm{e}$, l'application f est strictement croissante sur $]0,\mathrm{e}]$ et strictement décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. De plus, d'après le théorème de croissance comparée, on a $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

3. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour $n \geqslant 1$.

a.
- On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0$
- On a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = f(2n+2) - f(2n+1) \leqslant 0$$

car f est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. En particulier, la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
- On a

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} = f(2n+2) - f(2n+3) \geqslant 0$$

car f est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. En particulier, la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ est croissante.

En conclusion les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes et convergent doncvers une même limite finie ℓ.

b. Il résulte alors de la propriété rappelée dans le sujet que la suite $(S_n)_{n\geqslant 4}$ converge.Comme il s'agit de la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n, celle si converge. Par contre, elle ne converge pas absolument car

$$|u_n| = \frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

Et, comme la série de Riemann de temre général $\frac{1}{n}$ diverge, la série de terme général $|u_n|$ diverge.

4. On note $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2}$ pour $n \geqslant 1$.

a. Soit $n \geqslant 3$. Comme la fonction f est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ et donc sur $[3, +\infty[$ (puisque le sujet a eu la bonté de nous rappeler que $\mathrm{e} < 3$), nous avons

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} = f(n+1) \leqslant f(t) = \frac{\ln t}{t} \leqslant f(n) = \frac{\ln n}{n} \qquad (n \leqslant t \leqslant n+1)$$

En intégrant sur $[n,n+1$, il résulte alors de la croissance de l'intégale que

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln n}{n}\mathrm{d}t = \frac{\ln(n)}{n} \qquad (n \geqslant 3)$$

b. Pour $a > 0$ et $b > 0$, nous avons (la fonction f étant continue sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[a,b]$)

$$\int_a^b \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_a^b = \frac{\ln(b)^2 - \ln(a)^2}{2}$$

c. D'après le résultat des deux questions précédentes, nous avons

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2}\right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n)^2 - \ln(n+1)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant 0 \end{aligned}$$

En particulier, la suite v est décroissante. Par ailleurs, nous remarquons que

$$\begin{aligned} v_n = & \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \frac{\ln(n)^2 - \ln(1)^2}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \int_1^n \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\geqslant 0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\underbrace{\frac{\ln(k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t}_{\geqslant 0 \text{ pour } k \geqslant 3}\right) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\ln(k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t\right) = c \end{aligned}$$

En conclusion, la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et minorée. Elle est doncconvergeante (*trop facile, z'ont même pas cherché à noyer le poisson*)

5. Soit $n \geqslant 1$. Alors, nous remarquons que

$$\begin{aligned} S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k &= \textstyle\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k=2\ell}} u_k + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k=2\ell+1}} u_k \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} u_{2\ell} + \sum_{\ell=1}^{n-1} u_{2\ell+1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(2\ell)}{2\ell} - \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ln(2\ell+1)}{2\ell+1} \end{aligned}$$

A fortiori, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
S_{2n} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} &= S_{2n} + \sum_{\substack{k=1\\k=2\ell}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k=1\\k=2\ell+1}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= S_{2n} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(2\ell)}{2\ell} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ln(2\ell+1)}{2\ell+1} \\
&= 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(2\ell)}{2\ell} \\
&= 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(\ell)}{2\ell} \\
&= 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(2)}{2\ell} + 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(\ell)}{2\ell} \\
&= \ln(2)\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(\ell)}{\ell}
\end{aligned}$$

En soustrayant $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$ de chaque coté, il vient alors

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \ln(2)\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ln(\ell)}{\ell} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \left(v(n) + \frac{\ln(n)^2}{2}\right) - \left(v(2n) + \frac{\ln(2n)^2}{2}\right) \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v(n) - v(2n) + \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{(\ln(2)+ln(n)^)2}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2)\ln(n)
\end{aligned}$$

6. Il résulte de la définition de la suite w et de la relation précédente que

$$S_{2n} = \ln(2)w_n + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} \qquad (n \geqslant 1)$$

On $w_n = \gamma + o(1)$ et comme la suite v converge vers une limite finie ℓ d'après la question 4c, il en est de même pour la suite $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$. De sorte, qu'en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation précédente, obtenons que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \gamma\ln(2) + \ell - \ell - \frac{\ln(2)^2}{2} = \gamma\ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}.$$

EXO 3 extrait de EML lyon 2018

Soit $n \geqslant 2$. Pour tout polynôme P de $R[X]$, on pose

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

1. a.

- $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de référence
- Pour $P \in \mathbb{R}_n[R]$, $\frac{1}{n}X(X-1)P'$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (de degré $\leqslant n+1$), de même que XP. De sorte que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \subset \mathbb{R}[X]$. On a donc bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. On remarque que

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{n}X(X-1)(\lambda P + \mu Q)' + X(\lambda P + \mu Q) \\
&= \frac{1}{n}X(X-1)(\lambda P' + \mu Q') + X(\lambda P + \mu Q) \\
&= \lambda\left(\frac{1}{n}X(X-1)P' + XP\right) + \mu\left(\frac{1}{n}X(X-1)Q' + XQ\right) \\
&= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$

b. On a $\varphi(X^n) = \frac{1}{n}X(1-X)nX^{n-1} + X^{n+1} = -X^{n+1} + X^n + X^{n+1} = X^n$.

c. Pour cela, il suffit de prouver que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, ce qui nous permet de restreindre l'application linéaire du a) à l'arrivée à $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors il eixte un (unique) nombre réel λ et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$P = \lambda X^n + Q$$

Et alors $\varphi(P) = \lambda\varphi(X^n) + \varphi(Q)$ Comme $\deg Q \leqslant n-1$ et $\deg(Q') \leqslant \deg(Q) - 1 \leqslant n-2$, nous remarquons que $\deg(\varphi(Q)) \leqslant n$. A fortiori, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on calcule

$$\begin{aligned}
\varphi(X^k) &= \frac{1}{n}X(1-X)kX^{k-1} + X^{k+1} \\
&= \frac{k}{n}X^k - \frac{k}{n}X^{k+1} + X^{k+1} \\
&= \frac{k}{n}X^k + \frac{n-k}{n}X^{k+1} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)
\end{aligned}$$

A fortiori, cela donne la (grosse) matrice

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\
1 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots \\
0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
\vdots & & \ddots & \frac{2}{n} & \frac{n-1}{n} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 1
\end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang n (on fait n pivots successifs sur les colonnes en utilisant C_1 puis C_2 jusqu'à C_n)

3. a. L'endomorphisme φ ne peut pas être injecti d'après le théorème du rang $\dim_k er(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_n[X] - \text{rg}(\varphi) = n+1-n = 1$. Et donc $\ker\varphi \neq \{0\}$.

b. Soit $P \neq 0$ un polynôme de $\ker(\varphi)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} P \in \ker \varphi &\iff \varphi(P) = 0 \\ &\iff \tfrac{1}{n}X(1-X)P' + XP = 0 \\ &\iff P = -\tfrac{1}{n}(X-1)P' \end{aligned}$$

Si z est une racine de multiplicité m de P, nous savons que z est une racine de multiplicité $m-1$ de P'. Il découle alors de l'identité précédente que z est nécessairement égale à 1 (sinon, z ne peut pas être racine de P de multiplicité m). A fortiori, la seule racine possible pour P est 1 De sorte que $P = \lambda(X-1)^k$. Et alors, comme $0 = \varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP = \frac{1}{n}X(X-1)\lambda k(X-1)^{k-1} + \lambda X(X-1)^k$, nous obtenons que

$$0 = \lambda X\left(-\frac{k}{n}+1\right)(X-1)^k$$

En particulier, comme $\lambda \neq 0$, nous avons ncéssairement $k = n$ de sorte que $P = \lambda(X-1)^n$. Réciproquement, nous remarquons que $\varphi\big((X-1)^n\big) = 0$. En conclusion $\ker(\varphi) = \operatorname{Vect}\big((X-1)^n\big)$ Montrer que P admet 1 comme unique racine (dans $\mathbb{C}$) et que P est de degré n.

c. $(X-1)^n$ est une base de $\ker(\varphi)$, d'après le résultat de la proposition précédente

d. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ et on remarque que

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= \frac{1}{n}X(1-X)P_k' + XP_k \\ &= \frac{1}{n}X(1-X)(X^k(1-X)^{n-k})' + XX^k(1-X)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n}X(1-X)(kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}) + X^{k+1}(1-X)^{n-k} \\ &= \frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k+1} - \frac{n-k}{n}X^{k+1}(1-X)^{n-k} + X^{k+1}(1-X)^{n-k} \\ &= \frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k+1} + \frac{k}{n}X^{k+1}(1-X)^{n-k} \\ &= \frac{k}{n}(1-X+X)X^k(1-X)^{n-k} = \frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k} \\ &= \frac{k}{n}P_k \end{aligned}$$

Le sujet nous a fait trouver des vecteurs propres (le polynôme P_k) associés à des valeurs propres (le nombre réel $\frac{k}{n}$). C'est un grand classique ECS2

e. Montrons que la famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ *En ECS2, on dirait simplement que c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2. En ECS1, il faut travailler un peu plus.* Soient $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k(1-X)^{n-k}$$

En substituant 0 à X, nous obtenons alors que $0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k 0^k = \lambda_0$. En reportant dans l'identité initiale, il vient

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k = \sum_1 k = 0^n \lambda_k X^k (1-X)^{n-k} = X \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X^{k-1} (1-X)^{n-k}$$

De sorte que

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X^{k-1} (1-X)^{n-k}$$

Et on peut recommencer à substituer 0 à X pour montrer que $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_2 = 0$, etc... A la fin, on prouve (par récurrence finie) que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ de sorte que la famille $\mathcal{C} = (P_0, \cdots, P_n)$ est libre. Comme c'est une famille de $n+1$ vecteurs de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$, c'en est une base. Enfin, du fait de la relation $\varphi(P_k) = \frac{k}{n} P_k$, la matrice de φ dans cette noluvelle base est diagonale *c'est l'interet de la diagonalisation ECS2 que nous venons de faire à notre insu*

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$$

Un sujet pas trop dur (comparativement aux autres qu'on a fait en DS... une difficulté due à la dimension $n+1$ en algèbre linéaire. Pour les probas, il faut connaitre son binôme de Newton, ses coeffs du binôme, les sommes telescopiques, pour l'analyse les sommes, les primitives et les dls, ça aide