DEVOIR SURVEILLE 8

Exercice 1 (Edhec S)

Dans tout le problème, n désigne un entier de $\mathbb{N}$

Partie 1 On considère l'application w qui à tout élément P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe

$$w(P) = \left(\left(X^2 - X\right) P\right)''$$

1. Montrer que w est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer $w(X^k)$
3. Déterminer la matrice A de l'application w dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
4. Qu'en déduit-on ?
5. Soit $\mathcal{N}_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(0) = 0 = P(1)\}$.
   a. Montrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$
   b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = X^{k+1}(X-1)$. Montrer que $\mathcal{C} = (Q_0, \cdots, Q_n)$ est une base de $\mathcal{N}_{n+2}$.
   c. On considère l'application linéaire v de $\mathcal{N}_{n+2}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

   $$v(P) = P'' \qquad (P \in \mathcal{N}_{n+2})$$

   Déterminer $v(Q_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ puis en déduire que A est la matrice de v relativement à la base $\mathcal{C}$ (départ) et à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ (arrivée).

Partie 2. *Conseil : dans les EV de fonctions bien traduire les identités fonctionnelles du style $f = g$ en égalités concrètes avec des x du style $f(x) = g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$*

On rappelle que l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ et l'on pose $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) : f(0) = 0 = f(1)\}$

1. Montrer qu'on définit une application linéaire injective $u : \mathcal{N} \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ en posant

   $$u(f) = f'' \qquad (f \in \mathcal{N})$$

2. Soit $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Pour $x \in [0,1]$, on pose $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t| g(t)\mathrm{d}t$
   a. Justifier que G est un élément de $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ et montrer que

   $$G'(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t + \int_1^x g(t)\mathrm{d}t\right) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

   b. En déduire que G est un élément de $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ et que $G'' = g$.
   c. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on pose $H(x) = G(x) + ax + b$. Déterminer les réels a et b (sous forme d'intégrales) pour que H appartienne à $\mathcal{N}$.
   d. Déterminer $u(H)$ puis en déduire que u est surjective
   e. Que peut on en conclure ?
3. Vérifier alors que pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

$$u^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t| g(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 t g(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t) g(t)\mathrm{d}t \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Exercice 2 (Ecricom)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-1)} & (x \geqslant 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est bien une densité de variable aléatoire. On considère dorénavant une variable aléatoire X de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Z = X - 1$. Reconnaître la loi de Z.
4. Simulation :
   a. Soit U une variable de loi uniforme sur $[0,1[$. Rappeler la fonction de répartition de U.
   b. Déterminer la loi de la variable $V = -\frac{1}{2}\ln(1-U)$
   c. En déduire, à l'aide de la syntaxe *rand()*, un programme scilab simulant X

Probleme (Escp/Hec)

Dans tout le problème

- On note $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur le même espace $(\Omega,\mathcal{A})$, qui est sauf mention contraire, muni de la probabilité P.
- On note S_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles par

$$S_X(x) = P(X > x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Partie I. Probabilité de surpassement et espérance

1. On suppose uniquement dans cette question que X suit la loi exponentielle $\mathrm{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
   a. Vérifier l'égalité $E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x)\mathrm{d}x$
   b. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition F de X et interpréter $E(X)$ en terme d'aire grace à la formule précédente.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.
   a. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} h(x)\mathrm{d}x$
   b. Déterminer deux réels c et d vérifiant

$$h(x) = \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2} \qquad (x \geqslant 0)$$

   En déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}^+$.
   c. Montrer que l'on définit une densité de probabilité en posant

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)(x+2)\ln 2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f_0 du 2c)
   a. La variable aléatoire X admet-elle une esperance ?
   b. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $S_X(x)$ et en trouver un équivalent lorsque $x \to +\infty$.

   c. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\mathrm{d}x$.

4. a. Justifier la monotonie de la fonction S_X et en trouver la limite en $+\infty$.
   b. Montrer que S_X est continue à droite. A quelle condition est-elle continue en 0 ?
5. Dans cette question, on suppose que X admet une densité f nulle sur $]-\infty, 0]$, continue sur $]0, +\infty[$ (mais non nécessairement en 0)
   a. Montrer que la fonction S_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$
   b. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$
   c. Pour $A \geqslant 0$, établir l'égalité $\displaystyle\int_0^A S_X(x)\mathrm{d}x = AS_X(A) + \int_0^A xf(x)\mathrm{d}x$
   d. En déduire que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\mathrm{d}x$ est convergente, alors X admet une espérance
   e. Si X admet une espérance, montrer que $\displaystyle\int_A^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \geqslant AS_X(A)$ pour $A \geqslant 0$.
   f. Déduire des résultats précédents que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\mathrm{d}x$ est convergente et que dans ce cas, on a

$$E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x)\mathrm{d}x$$

6. Dans cette question, on suppose que X est discrète et à valeurs dans $\mathbb{N}$
   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir que

$$\sum_{k=0}^{n} S_X(k) = (n+1)P(X \geqslant n+1) + \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$$

   b. En déduire que si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, alors X admet une espérance.
   c. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, et que dans ce cas,

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n)$$

   d. On suppose que X admet une espérance
      i. Pour $N \in \mathbb{N}$, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^N S_X(x)\mathrm{d}x$ à l'aide d'une somme partielle de la série de terme général $S_X(n)$
      ii. En déduire que $E(X) = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A S_X(x)\mathrm{d}x$.