CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 8

I.

8. (a) g est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sauf peut-être en 0 (en fait elle l'est !). De plus g est nulle sur $]-\infty,0[$ et si $A>0$, $\int_0^A te^{-t}dt =$(IPP)$[-te^{-t}]_0^A + \int_0^A e^{-t}dt = 1-e^{-A} - Ae^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge et vaut 1.

   (b) La convergence absolue revient ici à la convergence, puisque g est nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$. Puis par IPP, on trouve $\int_0^A t^2e^{-t}dt = [t^2e^{-t}]_0^A + 2\int_0^A te^{-t}dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ d'après (a). Donc le temps moyen de transport d'un client par cette société est de 2 heures.

Exercice 4:

Partie I

1. Si $deg(P) \leqslant n$, alors $deg((X^2-X)P) \leqslant n+2$ d'où $deg(w(P)) \leqslant n+2-2 = n$.
   Linéarité : si $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $w(\lambda P+Q) = \big((X^2-X)(\lambda P+Q)\big)'' = (\lambda(X^2-X)P + (X^2-X)Q)'' = \lambda((X^2-X)P)'' + ((X^2-X)Q)'' = \lambda w(P) + w(Q)$.
2. $k=0$: $w(1) = (X^2-X)'' = (2X-1)' = 2$, $k=1$: $w(X) = (X^3-X^2)'' = (3X^2-2X)' = 6X-2$ et plus généralement, $w(X^k) = (X^{k+2}-X^{k+1})'' = ((k+2)X^{k+1}-(k+1)X^k)' = (k+2)(k+1)X^k - (k+1)kX^{k-1}$, vrai pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
3. A est une matrice triangulaire supérieure avec seulement la diagonale et la première sur-diagonale non nulle ...
4. On en déduit que A est inversible (tous les coeffs diagonaux sont non nuls), d'où w automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. (a) $N_n \subset \mathbb{R}_n[X]$, et si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, on a bien $P(0) = P(1) = 0$ d'où $P \in N_n$ et $N_n \neq \varnothing$. Enfin, si $P,Q \in N_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P+Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$ et $\lambda P(1) + Q(1) = 0$ d'où $\lambda P + Q \in N_n$.
   (b) La famille est échelonnée en degrés donc libre. Il reste à montrer que la famille est génératrice de N_{n+2} : soit $P \in N_{n+2}$. Alors 0 et 1 étant racines de P, $X(X-1)$ divise P d'où il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X) = X(X-1)Q(X)$. En écrivant le polynôme Q, on obtient bien qu'il existe $(a_0,a_1,...a_n)$ tels que $P(X) = X(X-1)\sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^{k+1}(X-1)$.
   (c) $v(Q_0) = v(X(X-1)) = v(X^2-X) = w(1) = 2$. De même, $v(Q_1) = v(X^2(X-1) = v(X^3-X^2) = w(X)$ et plus généralement pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $v(Q_k) = v(X^{k+1}(X-1)) = v(X^{k+2}-X^{k+1}) = w(X^k)$.

Partie II

1. Linéarité ok (via la linéarité de la dérivation).
   Injectivité : $Ker(u) = \{f \in N \,/\, f'' = 0\}$. On sait $0 \in Ker(u)$. Réciproquement soit $f \in Ker(u)$. Alors $f'' = 0$ d'où il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto ax+b$. Comme $f \in N$, on a de plus $f(0) = f(1) = 0$ d'où $a = b = 0$, et finalement $f : x \mapsto 0$. Donc $Ker(u) = \{0\}$ et u est injective.
2. (a) Question technique, mais le résultat étant dans la question, elle n'empêche pas de poursuivre ...
   Le but est de se ramener au théorème fondamental : première étape, supprimer les valeurs absolues, pour pouvoir sortir le x.
   $\forall x \in [0,1]$, $G(x) = \frac{1}{2}[\int_0^x (x-t)g(t)dt + \int_x^1 (t-x)g(t)dt] = \frac{1}{2}[x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt - \int_1^x tg(t)dt + x\int_1^x g(t)dt]$.
   Or (théorème fondamental), comme g et $t \mapsto tg(t)$ sont continues sur $[0,1]$ et que $0,1 \in [0,1]$, on obtient que G est la somme de 4 fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ D'où G est C^1 sur $[0,1]$ et
   $\forall x \in [0,1]$, $G'(x) = \frac{1}{2}[1\times\int_0^x g(t)dt + x\times g(x) - xg(x) - xg(x) + 1\times\int_1^x g(t)dt + x\times g(x)] = \frac{1}{2}[\int_0^x g(t)dt + \int_1^x g(t)dt]$.
   Détail d'un calcul : posons $H : x \mapsto \int_0^x g(t)dt$. H étant l'unique primitive de g s'annulant en 0, on obtient que H est C^1 et que $H' = g$!
   (b) En réappliquant ce fameux théorème fondamental, on obtient que G' est C^1 sur $[0,1]$, donc G est C^2 sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $G''(x) = \frac{1}{2}(g(x) + g(x)) = g(x)$.
   (c) H ainsi définie vérifie $H \in E_2$. Pour que $H \in N$, il faut de plus $H(0) = H(1) = 0$ càd $G(0) + b = 0$ et $G(1) + a + b = 0$. On en déduit $b = -G(0) = -^2\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt$ et $a = G(0) - G(1) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-1)g(t)dt$.
   (d) Comme $H \in N$ et $u(H) = g$, on a trouvé un antécédent de g par u. Vrai pour tout $g \in E_0$ d'où la surjectivité de u.
   (e) On en déduit que u est un isomorphisme de N sur E_0 ... donc que $u^{-1} : E_0 \to N$ existe.
3. Soir $g \in E_0$. La question 2. nous a montré que l'antécédent de g par u dans N est la fonction H définie pour tout $x \in [0,1]$ par $H(x) = \frac{1}{2}[\int_0^x |x-t|g(t)dt + \frac{1}{2}x\int_0^1 (2t-1)g(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt$. Il reste à réaliser que $u^{-1}(g) = H$ ... (et sinon, tout refaire à la main ! vérifier que le $u^{-1}(g)$ proposé est bien dans N, puis le dériver deux fois pour obtenir $u \circ u^{-1}(g) = g$ et conclure.)

II.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons $I = [-\frac{1}{e}, 0]$ et $f : t \mapsto e^t$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, pour tout $x \in I$, on a : $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \right| \leqslant M \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$, avec $M = \underset{t\in[0,x]}{max} |f^{(n+1)}(t)|$. Or pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leqslant 1$, donc $M \leq 1$. De plus pour tout entier naturel k, $f^{(k)} = f$ donc $f^{(k)}(0) = 1$ et pour $x \in I$, $|x| \leqslant \frac{1}{e}$, d'où $|x|^{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.

   Finalement $\forall x \in I$, $\quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$

   (b) Soit $x \in]0, 1]$. Par l'étude de la question 1.(b), $x \ln x \in [-\frac{1}{e}, 0]$. On peut appliquer le résultat de la question précédente : $\left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$ Les fonctions en jeu sont continues et d'intégrales convergentes, donc par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \mathrm{d}x$

   soit $\int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$ Par ailleurs, par linéarité $I - S_n = \int_0^1 \left(e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x$ et d'après l'inégalité triangulaire : $|I - S_n| \leqslant \int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$

   (c) Sans forme indéterminée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} = 0$. Le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement de la question précédente donne : $\lim_{n\to+\infty} S_n = I$. Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = I$.

   Le changement d'indice $n = k+1$ donne : $I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$

   (d)
```
function I = estimation(eps)
n = 0
while 1/ (exp(n+1)*factorial(n+1)) >= eps
n = n+1
end
I = somme(n)
endfunction
```

Exercice 2:

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf à gauche en 1, et positive sur $\mathbb{R}$.
   De plus, comme f est nulle sur $]-\infty, 1[$, il suffit d'étudier $\int_1^{+\infty} f(t)dt$, impropre en $+\infty$.
   Soit $A > 1$. Alors $\int_1^A f(t)dt = \int_1^A 2e^{-2(t-1)}dt = [-e^{-2(t-1)}]_1^A = 1 - e^{-2(A-1)} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
   D'où $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1 et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. $X(\Omega) = [1, +\infty[$ et pour $x < 1$, $F(x) = 0$.
   Pour $x \geq 1$, $F(x) = 0 + \int_1^x f(t)dt = \int_1^x 2e^{-2(t-1)}dt = [-e^{-2(t-1)}]_1^x = 1 - e^{-2(x-1)}$.
   Conclusion : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - e^{-2(x-1)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X \leq x+1) = F(x+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x+1 < 1 \\ 1 - e^{-2(x+1-1)} & \text{si } x+1 \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } x \geq \end{cases}$
   On en déduit que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.
4. (a) cours
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(V \leq x) = P(-\frac{1}{2}\ln(1-U) \leq x) = P(\ln(1-U) \geq -2x) = P(1 - U \geq e^{-2x}) = P(U \leq 1 - e^{-2x})$
   $= \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - e^{-2x} < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } 0 \leq 1 - e^{-2x} < 1 \\ 1 & \text{si } 1 - e^{-2x} \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. D'où $-\frac{1}{2}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$
   (c) On simule $Z+1$, c'est-à-dire $V+1$: `x=-1/2*ln(1-rand())+1`.