1 — Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)} 2^k\binom{n}{2k}$.

2 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{p=0}^{n} p(p-1)\binom{n}{p}^2 = n(n-1)\binom{2n-2}{n-2}$$

.

3 — Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leqslant n$. Démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

4 — Montrer les formules suivantes :

1. $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$ $(0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$

5 — 1. Combien y a-t-il d'élèves dans une classe où 27 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 9 les deux langues, sachant que chaque élève étudie au moins une langue ?

2. Dans une classe de 31 élèves, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 14 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l(anglis et l'allemand. Combien étudient les 3 langues ?

6 — On dispose de 8 boules numérotées et de quatre sacs numérotés. On répartir les 8 boules dans les sacs. Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Combien de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?

7 — On note A l'ensemble des nombres de 6 chiffres formés avec le chiffres 1, 2, 3, ..., 9.

1. Combien y a-t-il d'éléments de A ?
2. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres sont pairs ?
3. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres sont différents ?
4. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres forment une suite croissante strictement ?

8 — Soit $E = [\![0 \ ; n]\!]$.

1. Combien y'a-t-il de couples (x, y) dans E^2 ?
2. Combien de couples $(x, y \in E^2$ tels que
   a) $x + y = n$?
   b) $x \neq y$?
   c) $x \leqslant y$?
   d) $x < y$?
   e) $x + y = k$ avec $k \in [\![0 \ ; 2n]\!]$?

9 — Dans une urne on place n boules blanche et une seule noire. On tire simultanément k boules. Déterminer successivement le nombre de tirages sans boules noires, avec au moins une boule noire, possibles en tout. Qu'obtenez-vous ?

10 — Déterminer le nombre de p–uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\{1, \ldots, n\}$ tels que $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$.

11 — Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.
   INDICATION : *Discuter suivant le nombre d'éléments de A.*
2. En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \varnothing$.
3. En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E vérifiant $A \sqcup B \sqcup C = E$. (la notation de la réunion avec des symboles à angles droit : $A \sqcup B \sqcup C$ signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints)
4. Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct. Généraliser.

12 — Soit E un ensemble fini, non vide, de cardinal n, A et B deux parties de E de cardinaux respectifs a et b. On note c le cardinal de $A \cup B$. Calculer card$A \cap B$, card$\overline{A} \cap B$, card$A \cap \overline{B}$, card$\overline{A} \cap \overline{B}$, card$\overline{A} \cup B$, card$A \cup \overline{B}$, card$\overline{A} \cup \overline{B}$, en fonction de a, b, c et n.

13 — On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J.

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A et C apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A et C apparaissent dans cet ordre ?

14 — Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constitué de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de main possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

15 — Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il distribue ses 8 fruits différents (une pomme, une banane, etc...). Combien y a-t-il de distributions possibles
   a) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?

b) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?

2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes Golden identiques.

16 — 1. Combien le mot *livre* possède-t-il d'anagrammes ? et le mot *feuille* ? et le mot *Mississipi* ?

2. Quel est le coefficient de $a^3b^4c^2d$ dans $(a+b+c+d)^{10}$

17 — On dispose de 32 joueurs de tennis. De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi de tennis en simple ? en double ? en simple de manière à ce que les joueurs 1 et 2 ne puissent pas se rencontrer avant la finale ?

18 — Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées. On tire simultanément 4 boules dans l'urne.

1. Nombre de tirages possibles ?
2. Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ?
3. Nombre de tirages contenant autant de boules blanches que de rouge ?
4. Nombre de tirages contenant les trois couleurs ? Contenant exactement deux couleurs ?

19 — On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?

20 — On dispose de 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules vertes, toutes distinguables. On répartit ces boules dans n urnes ($n \geqslant 1$).

1. Nombre de répartitions possibles ?
2. Nombre de répartitions telles que les boules soient dans deux urnes seulement ?
3. Nombre de répartitions telles que la première urne ne contiennent que des boules d'une seule couleur ?

21 — Combien de mots peut-on former avec les lettres A, B, C, D et E, en utilisant une seule fois chaque lettre ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A et finissent par B ? Combien de mot de 5 lettres où le A apparaît avant le B ?

22 — Pour payer l'autoroute, une personne doit mettre 20 € dans un automate qui n'accepte que les pièces de 1 € et 2 €. Supposant qu'elle ait la monnaie suffisante, de combien de façons peut-elle payer ? (On tient compte de l'ordre d'introduction des pièces dans l'appareil).

23 — Lors d'un dîner, 4 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total ? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau ?

24 — Dans le quadrillage $\mathbb{N}^2$, A et B sont les points de coordonnées respectives $(0,0)$ et (p,q). On appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut ?

1. Combien y a-t-il de chemins croissants de longueur n ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de A à B ?

25 — Dans le plan, on considère n points $M_1, M_2, \dots, M_n$ tels que trois quelconques ne soient pas alignés. Quel est le nombre de polygones à n cotés que l'on peut construire avec ces points ?

26 — Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

1. Combien de jurys différents peut-on former ?
2. Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?
3. Monsieur X refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

27 — Combien y a-t-il de mots de n lettres formé des lettres a et b tels que

1. Il n'y ait jamais deux a ou deux b consécutifs.
2. Il y ait exactement un double a (pas de triple et pas d'autre double).
3. Il y ait exactement deux double a (pas de triple et pas d'autre double).

† **28 —** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de solutions $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ à l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$?