Exercice 1 :

1a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2\alpha & 2\alpha^2 & 2\alpha^3 \\ \frac{2}{\alpha} & 3 & 2\alpha & 2\alpha^2 \\ \frac{2}{\alpha^2} & \frac{2}{\alpha} & 3 & 2\alpha \\ \frac{2}{\alpha^3} & \frac{2}{\alpha^2} & \frac{2}{\alpha} & 3 \end{pmatrix}$ donc $A^2 - 2A = 3\cdot I$ d'où $\boxed{A^2 = 3I + 2A}$ (1)

1b) d'après 1a) $\frac{A}{3}(A^2-2A) = \frac{1}{3}(3I) = I$ donc $A \times \left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I\right) = I$

D'où $\boxed{A \text{ inversible et } A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I}$

2a) $B \times C = \frac{1}{4}(A+I) \times \frac{1}{4}(3I - A) = \frac{1}{16}[A\times(3I) - A^2 + 3I\times I - I \times A]$

$= \frac{1}{16}[3A - A^2 + 3I - A] = \frac{1}{16}[2A + 3I - A^2] = \frac{1}{16}[0_4]$ donc $B \times C = 0_4$

et $C \times B = \frac{1}{4}(3I - A) \times \frac{1}{4}(A+I) = \frac{1}{16}[3I\times A + 3I \times I - A^2 - A \times I]$

$= \frac{1}{16}[3A + 3I - A^2 - A] = \frac{1}{16}[2A - A^2 + 3I] = \frac{1}{16}[0_4]$ donc $\boxed{C\times B = 0_4 = B \times C}$

2b) $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$ $B^i \times C^j = B^{i-1} \times \underbrace{B \times C}_{=0_4} \times C^{j-1}$ avec B^{i-1} existe car $i \geq 1$ donc $i-1 \in \mathbb{N}$ et C^{j-1} existe car $j \geq 1$ donc $j-1 \in \mathbb{N}$

$= B^{i-1} \times 0_4 \times C^{j-1} = 0_4$

D'où $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^* \ \forall j \in \mathbb{N}^* \ B^i \times C^j = 0_4}$

2c) $B^2 = \frac{1}{4}(A+I) \times \frac{1}{4}(A+I) = \frac{1}{16}(A^2 + A\times I + I \times A + I \times I) = \frac{1}{16}(A^2 + 2A + I)$

or d'après 1a) $A^2 = 3I + 2A$ donc $A^2 + 2A = 3I + 4A$ et $B^2 = \frac{1}{16}(3I + I + 4A) = \frac{4}{16}(I + A)$

Ainsi $B^2 = \frac{1}{4}(I + A) = B$ d'où $\boxed{B^2 = B}$

$C^2 = \frac{1}{4}(3I - A) \times \frac{1}{4}(3I - A) = \frac{1}{16}[9I - 3A - 3A + A^2] = \frac{1}{16}[9I - 6A + A^2]$

or $A^2 = 3I + 2A$ d'où $C^2 = \frac{1}{16}[9I - 6A + 3I + 2A] = \frac{1}{16}[12I - 4A]$

$C^2 = \frac{4}{16}[3I - A] = \frac{1}{4}[3I - A] = C$ ainsi $\boxed{C^2 = C}$

3a) $3B - C = \frac{3}{4}(A+I) - \frac{1}{4}(3I - A) = \underbrace{\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)}_{=0} I + \underbrace{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{=1} A = 0.I + 1.A$

d'où $\boxed{A = 3B - C}$

3b) $A^n = (3B - C)^n$ or $B \times C = C \times B$ donc on peut utiliser la formule du binôme

$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3B)^k (-C)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} B^k \times C^{n-k}$

de plus $B^i \times C^j = 0_4$ si $i \geq 1$ et $j \geq 1$ ici $i = k$ et $j = n-k$ donc il faut $k \geq 1$, $k \leq n-1$

Alors $A^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \underbrace{3^0}_{=1} (-1)^{n-0} \underbrace{B^0}_{=I} C^{n-0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} \underbrace{B^k C^{n-k}}_{=0_4} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} 3^n \underbrace{(-1)^0}_{=1} B^n C^0$ (2)

car $i = k \geq 1$ et $j = n-k \geq 1$

$A^n = 1.1.(-1)^n.I \times C^n + 0_4 + 1.3^n.1.B^n \times I$

$A^n = (-1)^n.C^n + 3^n B^n$ or $C^n = C$ et $B^n = B$ d'après 2c)

Finalement $\boxed{A^n = (-1)^n.C + 3^n.B}$

3c) $B = \frac{1}{4}(A+I)$ et $C = \frac{3}{4}I - \frac{1}{4}A$

D'où $A^n = (-1)^n\left[\frac{3}{4}I - \frac{1}{4}A\right] + 3^n.\frac{1}{4}[A+I] = \underbrace{\left(\frac{3(-1)^n}{4} + \frac{3^n}{4}\right)}_{=\text{réel}} I + \underbrace{\left[\frac{-1}{4}(-1)^n + \frac{3^n}{4}\right]}_{=\text{réel}} A$

Ainsi $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $A^n = \lambda.I + \mu.A$ donc $\boxed{A^n \in \text{Vect}(I, A)}$

Exercice 2 :

1a) $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\frac{k}{n}.\binom{n}{k} = \frac{k}{n}.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k.n.(n-1)!}{n.k.(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ (car $k \geq 1$ et $n \geq 1$)

or $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ donc on a bien $\boxed{\forall k \geq 1 \ \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}}$

1b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \underbrace{\binom{n}{0} \frac{0}{n} x^0 (1-x)^{n-0}}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} \frac{k}{n}}_{=\binom{n-1}{k-1}} x^k (1-x)^{n-k}$ d'après 1a) car $k \geq 1$

$= 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i+1} (1-x)^{n-i-1}$ $\Big\}$ $i = k-1$ donc $k = i+1$

$= x . \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i}}_{\text{formule du binôme}} = x.(x + 1 - x)^{n-1} = x.1^{n-1}$

D'où $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x \quad \forall x \in [0, 1]}$

2a) $J_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} dx \underset{(1b)}{=} \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1^2 - 0^2}{2}\right)$

D'où $\boxed{J_n = \frac{1}{2}}$

2b) $J_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{k}{n}\, x^k(1-x)^{n-k}\,dx$

$\underset{\text{par linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \binom{n}{k}\frac{k}{n}\, x^k(1-x)^{n-k}\,dx$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{k}{n}\left(\underbrace{\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx}_{=I(k,n)}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\, I(k,n)$

or d'après le résultat admis $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $I(k,n) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$

Alors $J_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n(n+1)} = \boxed{\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} k = J_n}$

or $J_n = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ on retrouve la formule connue.

3.a) $\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\,\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,[(n-2)-(k-2)]!} = \boxed{\binom{n-2}{k-2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} \quad \forall k\in[\![2,n]\!]}$

3.b) $h_n(x) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^k(1-x)^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}x^k(1-x)^{n-k} = 0+0+\sum_{k=2}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}_{=\binom{n-2}{k-2} \text{ car } k\geq 2}x^k(1-x)^{n-k}$

$= \sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}$ on pose $i = k-2$

$= \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}x^{i+2}(1-x)^{n-(i+2)}$

$= x^2\cdot\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}x^i(1-x)^{n-2-i} \underset{\text{binôme}}{=} x^2\,[x+1-x]^{n-2} = x^2\cdot 1$

D'où $\boxed{\forall x\in[0,1]\ \ h_n(x) = x^2}$

3c) $K_n = \int_0^1 h_n(x)\,dx \underset{3b}{=} \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1^3-0^3}{3} = \frac{1}{3}$ d'où $\boxed{K_n = \frac{1}{3}}$

de plus $K_n = \int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}x^k(1-x)^{n-k}\,dx \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$

or $\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx = I(k,n)$ donc $K_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\,I(k,n)$

de plus, d'après le résultat admis en 2b) $I(k,n) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$

Ainsi $K_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)(n+1)}$ or $K_n = \frac{1}{3}$

D'où $\boxed{\sum_{k=0}^{n}k(k-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}}$

3d) $\sum_{k=0}^{n}k^2 = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)+k = \sum_{k=0}^{n}k(k-1) + \sum_{k=0}^{n}k = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$ par 3c) (et 2b))

Ainsi $\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)}{6}\,[2(n-1)+3] = \frac{n(n+1)}{6}\,[2n+1]$ on retrouve $\boxed{\sum_{i=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

4) a) $\forall k\in[\![1,n]\!]$ $I(k,n) = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$ on pose $\begin{cases} u(x) = x^k \\ u'(x) = kx^{k-1}\end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = \frac{-(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1} \\ v'(x) = (1-x)^{n-k}\end{cases}$

$I(k,n) = \left[x^k\cdot\frac{-(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 kx^{k-1}\cdot\frac{(-1)(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}\,dx$

$= 0 - 0 + \frac{k}{n-k+1}\cdot\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}\,dx = \frac{k}{n-k+1}\,I(k-1,n)$

D'où $\boxed{I(k,n) = \frac{k}{n-k+1}\,I(k-1,n) \quad \forall k\in[\![1,n]\!]}$

4b) $I(k,n) = \frac{k}{n-k+1}\times\frac{k-1}{n-k+2}\times\frac{k-2}{n-k+3}\times\frac{k-3}{n-k+4}\times\dots\times\frac{\overbrace{k-(k-1)}^{=1}}{\underbrace{n-(k-1)+1}_{=n}}\,I(0,n)$

$= \frac{k!}{n(n-1)\cdots(n+1-k)}\cdot I(0,n)$ avec $I(0,n) = \int_0^1 1\cdot(1-x)^n\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 0 + \frac{1}{n+1}$

d'où $I(k,n) = \frac{k!}{n(n-1)\cdots(n+1-k)}\cdot\frac{1}{n+1}$

or $\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{1}{(n+1)}\times\frac{k!\,(n-k)!}{n!} = \frac{k!}{n+1}\cdot\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$

Ainsi $\boxed{I(k,n) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}}$ c'est la formule admise.

Exercice 3:

I1) supposons A inversible alors A^{-1} existe.

or $A^2 = 0_n$ donc $A^{-1}\times A\times A = A^{-1}\times 0_n$ ainsi $I\times A = 0_n$ càd $A = 0_n$ ce qui est faux

donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$

I2) soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tq $\lambda A + \mu I = 0_n$ alors $A\times(\lambda A+\mu I) = A\times 0_n$

càd $\lambda A^2 + \mu A = 0_n$ or $A^2 = 0_n$

Ainsi $\lambda . 0_m + \mu A = 0_m$ d'où $\mu A = 0_m$ or $A \neq 0_m$ donc $\mu = 0$

Mais $\lambda A + 0 . I = 0_m$ d'où $\lambda A = 0_m$ avec $A \neq 0_m$ donc $\lambda = 0$ Finalement $\boxed{\lambda = \mu = 0}$

3a) $M^2 = (A+tI) \times (A+tI) = A^2 + 2tA + t^2 I$ or $A^2 = 0_m$

donc $M^2 = 0_m + 2tA + t^2 I = 2tA + t^2 I$.

or $2tM - t^2 I = 2t(A+tI) - t^2 I = 2tA + (2t^2 - t^2) I = 2tA + t^2 I$

Finalement $\boxed{M^2 = 2tM - t^2 I}$

3b) $M^2 - 2tM = -t^2 I$ or $t \neq 0$ donc on peut multiplier par $-\frac{1}{t^2}$

on a $-\frac{1}{t^2}\left[M \times M - 2t\, M \times I \right] = \frac{-1}{t^2}(-t^2 I) = I$

cad $M \times \left[-\frac{1}{t^2} M + \frac{2}{t} I \right] = I$ donc $\boxed{M \text{ inversible et } M^{-1} = \frac{-1}{t^2} M + \frac{2}{t} I}$

II - 1a) $B^2 = (A+I) \times (A+I) = A^2 + 2A + I$ or $A^2 = 0$ donc $\boxed{B^2 = 2A + I}$

1b) on suppose que pour $k \geq 2$ fixé $\boxed{B^k = I + kA}$ c'est H_k

$B^{k+1} = B^k \times B \underset{(H_k)}{=} (I + kA)(I + A) = I + kA + A + kA^2$ avec $A^2 = 0_m$

donc $B^{k+1} = I + (k+1)A$ c'est H_{k+1}

de plus H_2 vraie par 1a) et H_1 vraie car $B^1 = I + 1.A$ et H_0 vraie car $B^0 = I = I + 0.A$

conclusion : Par th. de recurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad B^k = I + kA}$

2) $S_p = \sum_{k=0}^{p} B^k \underset{(1b)}{=} \sum_{k=0}^{p} (I + kA) = \sum_{k=0}^{p} I + \sum_{k=0}^{p} kA$

d'où $\boxed{S_p = (p+1) . I + \frac{p(p+1)}{2} A}$

III - 1a) $(N_\lambda)^2 = (A + \lambda I) \times (A + \lambda I) = A^2 + 2\lambda A + \lambda^2 I \underset{(A^2=0)}{=} 2\lambda A + \lambda^2 I$

D'où $\boxed{(N_\lambda)^2 = 2\lambda A + \lambda^2 . I}$

1b) $(N_\lambda)^3 = (N_\lambda)^2 . N_\lambda = (2\lambda A + \lambda^2 I)(A + \lambda I) = 2\lambda \underbrace{A^2}_{=0_m} + 2\lambda^2 A + \lambda^2 A + \lambda^3 I$

d'où $(N_\lambda)^3 = 3\lambda^2 . A + \lambda^3 I$

on va donc montrer par recurrence que $\forall k \geq 2 \quad (N_\lambda)^k = k\lambda^{k-1} . A + \lambda^k I$

Supposons que pour k fixé $\boxed{(N_\lambda)^k = k\lambda^{k-1} . A + \lambda^k I}$ c'est H_k

on a $(N_\lambda)^{k+1} = (N_\lambda)^k \times N_\lambda \underset{(H_k)}{=} \left[k\lambda^{k-1} A + \lambda^k I \right] \left[A + \lambda I \right]$

$= k\lambda^{k-1} . \underbrace{A^2}_{=0_m} + \lambda^k A + \underbrace{(k\lambda^{k-1} A)(\lambda I)}_{= k\lambda^{k-1} . \lambda . A \times I} + \lambda^{k+1} I$

$= 0_m + \lambda^k A + k\lambda^k A + \lambda^{k+1} I = (k+1)\lambda^k A + \lambda^{k+1} I$ c'est H_{k+1}

de plus H_2 et H_3 vraie et H_1 vraie car $N_\lambda^1 = A + \lambda I = 1 . \lambda^0 . A + \lambda^1 I$

conclusion : par th de recurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad N_\lambda^k = k\lambda^{k-1} . A + \lambda^k I}$

2a) $x_p = \sum_{k=1}^{p} k\lambda^{k-1} \underset{(j = k-1)}{=} \sum_{j=0}^{p-1} (j+1)\lambda^j = \sum_{j=0}^{p-1} j\lambda^j + \sum_{j=0}^{p-1} \lambda^j$

or $\sum_{j=0}^{p-1} j\lambda^j = 0 + \sum_{j=1}^{p-1} j\lambda^{j-1} \times \lambda = \lambda \left(\sum_{j=1}^{p} j\lambda^{j-1} - p\lambda^{p-1} \right) = \lambda (x_p - p\lambda^{p-1})$

et $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^j = \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda}$ ainsi $\boxed{x_p = \lambda \left[x_p - p\lambda^{p-1} \right] + \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda}}$

2b) d'après 2a) $(1-\lambda) x_p = -p\lambda^p + \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda}$ donc $x_p = \frac{1}{1-\lambda} \left[\frac{-p\lambda^p (1-\lambda) + 1 - \lambda^p}{1-\lambda} \right]$

Ainsi $x_p = \frac{1}{1-\lambda} \left[\frac{p\lambda^{p+1} - (p+1)\lambda^p + 1}{1-\lambda} \right]$

cad $\boxed{x_p = \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left[p\lambda^{p+1} - (p+1)\lambda^p + 1 \right]}$

3) $T_p = \sum_{k=0}^{p} (N_\lambda)^k = \left(\sum_{k=1}^{p} k\lambda^{k-1} A + \lambda^k . I \right) + I = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p} k\lambda^{k-1} \right)}_{= x_p} . A + \sum_{k=1}^{p} \lambda^k . I + I$

d'où $T_p = x_p . A + \left(\frac{\lambda - \lambda^{p+1}}{1-\lambda} \right) I + I$ $1 + \left(\frac{\lambda - \lambda^{p+1}}{1-\lambda} \right) = \frac{1 - \lambda + \lambda - \lambda^{p+1}}{1-\lambda}$

Ainsi $\boxed{T_p = x_p . A + \left(\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda} \right) I}$

IV - 1) $M = A + (\lambda - 1) I = A + tI$ avec $t = \lambda - 1$

or d'après I 3b) si $t \neq 0$ alors M inversible ie $\lambda - 1 \neq 0$ car $\lambda \neq 1$

donc M inversible et $M^{-1} = \frac{-1}{(\lambda-1)^2} . M + \frac{2}{(\lambda-1)} \quad I = \frac{-1}{(\lambda-1)^2} . (A + (\lambda-1)I) + \frac{2}{(\lambda-1)} \quad I$

ainsi $M^{-1} = \frac{-1}{(\lambda-1)^2} A + \left[\frac{-1}{[illegible]} + \frac{2}{[illegible]} \right] I = \boxed{\frac{-1}{(\lambda-1)^2} . A + \left(\frac{1}{[illegible]} \right) I = M^{-1}}$

2) $(N_\lambda - I)\sum_{j=0}^{k}(N_\lambda)^j = \sum_{j=0}^{k}(N_\lambda)^{j+1} - \sum_{j=0}^{k}(N_\lambda)^j \underset{\text{télescopage}}{=} N_\lambda^{k+1} - N_\lambda^0$

d'où $\boxed{(N_\lambda - I)\sum_{j=0}^{k}(N_\lambda)^j = N_\lambda^{k+1} - I}$

3) $T_p = \sum_{k=0}^{p}(N_\lambda)^k$ on applique 2) avec $k=p$ on a : $(N_\lambda - I)\sum_{j=0}^{p}(N_\lambda)^j = N_\lambda^{p+1} - I$

cad $(N_\lambda - I)\cdot T_p = (N_\lambda)^{p+1} - I$

or $N_\lambda - I = M$ avec M inversible d'après 1) d'où M^{-1} existe.

on a $\underbrace{M^{-1}\times M}_{=I}\times T_p = M^{-1}\times(N_\lambda^{p+1} - I)$ cad $\boxed{T_p = M^{-1}(N_\lambda^{p+1} - I)}$

or $M^{-1} = \frac{-1}{(\lambda-1)^2}A + \frac{1}{\lambda-1}I$ et $N_\lambda^{p+1} = (p+1)\lambda^p A + \lambda^{p+1}I$ d'après 1c)

D'où $T_p = \left[\frac{-1}{(\lambda-1)^2}A + \frac{1}{\lambda-1}I\right]\left[(p+1)\lambda^p A + \lambda^{p+1}I - I\right]$

$= -\frac{(p+1)\lambda^p}{(\lambda-1)^2}\underbrace{A^2}_{=0_n} + \left(\frac{-(\lambda^{p+1}-1)}{(\lambda-1)^2} + \frac{\lambda^p(p+1)}{\lambda-1}\right)A + \left(\frac{\lambda^{p+1}-1}{\lambda-1}\right)I$

$= \frac{1-\lambda^{p+1}+\lambda^p(p+1)(\lambda-1)}{(\lambda-1)^2}A + \left(\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda}\right)I$

on retrouve $\boxed{T_p = x_p\cdot A + \left(\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda}\right)I}$ avec $\boxed{x_p = \frac{p\lambda^{p+1}-(p+1)\lambda^p+1}{(1-\lambda)^2}}$ on retrouve III.2)

Exercice 4 :

1) on suppose que pour n fixé P_n unitaire de degré n et P_{n-1} unitaire de degré $n-1$ c'est H_n

$P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X) \underset{H_n}{=} X\big[1\cdot X^n + \underbrace{\dots}_{\text{termes de deg}\le n-1}\big] - \big[1\cdot X^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{termes de deg}\le n-2}\big]$

$= 1\cdot X^{n+1} + \underbrace{\dots}_{\text{termes de deg}\le n}$ donc P_{n+1} unitaire de degré $n+1$ c'est H_{n+1}

de plus H_2 vraie car P_2 unitaire de degré 2 en effet $P_2(X) = XP_1(X) - P_0(X) = X^2 - 2$ et P_1 unitaire de degré 1

cad : par th. de récurrence $\forall n \ge 2$ H_n vraie ainsi $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \ P_n \text{ unitaire de degré } n}$

2)a) $\forall z\in\mathbb{C}^*$ $f(z)f(z^n) - f(z^{n-1}) = (z+\frac{1}{z})(z^n+\frac{1}{z^n}) - (z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}) = z^{n+1}+\frac{1}{z^{n-1}}+z^{n-1}+\frac{1}{z^{n+1}} - z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}}$

d'où $f(z)f(z^n) - f(z^{n-1}) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = f(z^{n+1})$ ainsi $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}^* \ f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1})}$

3b) on suppose que pour n fixé $f(z^n) = P_n(f(z))$ et $f(z^{n-1}) = P_{n-1}(f(z))$

on a $P_{n+1}(f(z)) = f(z)P_n(f(z)) - P_{n-1}(f(z))$

$\underset{H_n}{=} f(z)f(z^n) - f(z^{n-1}) \underset{3a}{=} f(z^{n+1})$ c'est H_{n+1}

cad : par th. de récurrence $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \ P_n(f(z)) = f(z^n)}$

4a) $P_n(f(z_k)) = f(z_k^n) = z_k^n + \frac{1}{z_k^n} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}} + e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2}} = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ donc $\boxed{P_n[f(z_k)] = 0 \ \forall k\in[0, n-1]}$

4b) deg $P_n = n$ et on vient de trouver n racines de P_n

de plus P_n est unitaire

donc on peut écrire la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$ - on a :

$P_n(X) = 1\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(X - f(z_k)) = \boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = P_n(X)}$

(car $f(z_k) = z_k + \frac{1}{z_k} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$)

5) $W = \prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ or $P_n(0) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = (-2)^n\cdot W$

avec $P_n(0) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ Finalement $W = \frac{P_n(0)}{(-2)^n} = \frac{2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(-2)^n}$

cad $\boxed{W = \frac{(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^{n-1}}}$