

Mathématiques

(poly illustré de cours)

ECS 1ère année

Olivier Binda

18 novembre 2017

1 Avant propos

Alphabet grec Il faut maîtriser les lettres grecques utilisées en ECS (en noir), classée ici par ordre décroissant d'usage :

π	Π	pi	Produits	ϑ	Θ	theta
σ	Σ	sigma	Sommes	φ	Φ	phi
λ	Λ	lambda	Espaces vectoriels	ζ	Z	zeta
μ	M	mu	Espaces vectoriels	η	H	eta
ω	Ω	omega	Probabilités	ξ	Ξ	xi
ε	E	epsilon	Limites	o	O	omicron
γ	Γ	gamma	Probabilités	ρ	P	rho
δ	Δ	delta		ψ	Ψ	psi
α	A	alpha		τ	T	tau
β	B	beta				

– Les lettres grecques grisées ne sont (quasiment) pas utilisées en ECS.

symboles Pour écrire les propositions logiques, un certain nombre de symboles mathématiques sont utilisés, qui sont comme des abréviations de morceaux de phrases

Symbole	Signification
\in	« élément de », « dans » ou « appartient à »
\forall	« pour chaque », « pour tout » ou « quel que soit »
\exists	« il existe » ou « on peut trouver »
$!$	« unique » ou « un et un seul »
\Rightarrow	« implique »
\Leftrightarrow	« équivaut à » ou « si et seulement si »
$:$	« tel que » ou « pour lequel »
$\{\dots\}$	« ensemble »

cours Un cours de mathématiques est généralement constitué de

- définitions, notations, conventions
 - les admettre (*elles ne comportent rien à prouver*)
 - les mémoriser.
- théorèmes, propriétés, corollaires, lemme :

- les mémoriser (*on les apprend en les utilisant*).
- apprendre à les utiliser (*via exercices, tds, dls, colles et (trop tard !) ds*).
- preuves, démonstrations :
 - les comprendre (*augmente la capacité à comprendre des choses complexes, améliore la compréhension du cours de maths*).
 - les vérifier (*augmente la rigueur, la capacité de trouver les erreurs et de déterminer si une preuve est juste sans l'intervention d'un professeur*).
 - retenir les idées importantes susceptibles de resservir.
- méthodes, algorithmes :
 - Les mémoriser (*comprendre leurs forces et leurs faiblesses*).
 - permet d'utiliser la méthode la plus efficace pour résoudre un problème (*souvent différente de la méthode que préfèrent utiliser les étudiants*)
- applications : usage intéressant d'une propriété
 - Les retenir
- exemples, illustrations, graphiques: aident à comprendre les concepts du cours. Inutiles ensuite.
- exercices : pour accroître sa culture mathématique et sa maîtrise technique du cours
- remarques :

définition	Une définition introduit un nouveau concept dans le langage mathématique
notation	Une notation introduit un nouveau symbole ou une nouvelle écriture
convention	Une convention attribue un sens (choisi par la communauté mathématique) dans un contexte particulier à un concept qui n'en avait pas encore (pour écrire, entre autre, des formules plus simples et plus générales)
théorème	Un théorème énonce une vérité mathématique concernant des concepts existants <ul style="list-style-type: none"> – Certains théorèmes prestigieux portent un nom, souvent le nom des mathématiciens qui l'ont découvert ou démontré.
propriété	Une propriété est un théorème moins important
corollaire	Un corollaire est une propriété qui découle « immédiatement » d'une autre
lemme	Un lemme est une propriété qui sert, quasi exclusivement dans le cours, à établir un autre résultat du cours
axiome	Un axiome est un énoncé fondamental sur lequel est basée une théorie mathématique et qui ne peut être démontré à l'aide des autres axiomes de la théorie <ul style="list-style-type: none"> – Tout l'édifice mathématique utilisé en ECS repose sur les axiomes de Zermelo – En général, les axiomes sont des propriétés très intuitives et de très bas niveau, trop lourdes à manipuler pour écrire des démonstrations contrairement aux propriétés avancées par le cours

Bases théoriques

2 Logique

Séquence 2

Les notions de ce chapitre font partie des bases fondamentales. Bien qu'il soit extrêmement improbable qu'elles soient l'objet d'un exercice au concours, elles ont un impact très sensible sur le résultat au concours car :

- Beaucoup de questions peuvent se traiter par récurrence
- La valeur d'une démonstration dépend de l'articulation logique sous-jacente.
- La compréhension fine de certaines questions nécessite une bonne maîtrise de la logique.

programme L'objectif du programme en ECS est d'acquérir le vocabulaire élémentaire des raisonnements mathématiques :

- Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée
- Quantificateurs : \forall , \exists .
- Propositions utilisant les connecteurs et les quantificateurs
- Nier une proposition
- Raisonnement par récurrence

2.1 Assertions et propositions logiques

assertion La logique binaire s'intéresse à des assertions, i.e. à des phrases affirmatives simples, dont elle tente d'établir la véracité ou la fausseté.

Définition 2.1 Une assertion est une affirmation élémentaire.

indécidable Il n'est malheureusement pas toujours possible d'attribuer la valeur « vraie » ou la valeur « fausse » à une assertion. Une assertion indécidable est une affirmation élémentaire à laquelle il est impossible d'attribuer une valeur logique (la valeur vraie ou la valeur fausse).

Définition 2.2 Une assertion indécidable est une assertion sans valeur logique.

– Pour la suite, nous allons laisser de côté les assertions indécidables, qui sont certainement surprenantes et amusantes mais qui n'ont quasiment aucune utilité pratique, à part pour quelques rares mathématiciens professionnels

proposition Nous allons principalement nous intéresser aux propositions logiques, i.e. aux assertions qui ne sont pas indécidables. Une proposition logique est une affirmation élémentaire à laquelle peut être attribuée soit la valeur vraie, soit la valeur fausse.

Définition 2.3 Une proposition logique est une assertion avec une valeur logique.

symboles Pour écrire les propositions logiques, nous allons utiliser un certain nombre de symboles mathématiques, que l'on peut voir comme des abréviations de morceaux de phrases françaises

Symbole	Signification
\in	« élément de », « dans » ou « appartient à »
\forall	« pour chaque », « pour tout » ou « quel que soit »
\exists	« il existe » ou « on peut trouver »
$!$	« unique » ou « un et un seul »
\Rightarrow	« implique »
\Leftrightarrow	« équivaut à » ou « si et seulement si »
$:$	« tel que » ou « pour lequel »
$\{\dots\}$	« ensemble »

2.2 Opérateurs

Dans cette section, les lettres \mathcal{P} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} désignent des propositions logiques.

2.2.1 Affirmation

affirmation Affirmer une proposition logique \mathcal{P} , c'est dire qu'elle est vraie.

Définition 2.4 $(\mathcal{P}) :=$ « \mathcal{P} est vrai »

– Certaines propositions logiques, bien qu'exprimées différemment, possèdent un sens identique et, par conséquent, la même valeur logique. En pratique, on manipulera de préférence la proposition de même sens la plus simple.

table de vérité La table de vérité de l'opérateur identité est

Propriété 2.5

\mathcal{P}	Vrai	Faux
(\mathcal{P})	Vrai	Faux

2.2.2 Négation

négation Nier une proposition logique \mathcal{P} , c'est affirmer son contraire.

Définition 2.6 $\overline{\mathcal{P}} := \ll \mathcal{P} \text{ est faux} \gg$

– La négation d'une proposition logique \mathcal{P} se prononce « non \mathcal{P} » et se note $\overline{\mathcal{P}}$ ou « non \mathcal{P} ».

table de vérité La table de vérité de l'opérateur logique de négation est

Propriété 2.7

\mathcal{P}	Vrai	Faux
$\overline{\mathcal{P}}$	Faux	Vrai

double négation On ne change pas le sens et la valeur d'une proposition en lui appliquant deux fois l'opérateur de négation.

Propriété 2.8 $\overline{\overline{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$

– La logique, c'est simple, il ne faut pas paniquer !

quantificateurs Nier une proposition comportant les quantificateurs \forall et \exists se fait de manière totalement mécanique, via les relations suivantes

Propriété 2.9 $\overline{\forall x \in X, \mathcal{P}_x} = \ll \exists x \in X, \overline{\mathcal{P}_x} \gg$

Propriété 2.10 $\overline{\exists x \in X, \mathcal{P}_x} = \ll \forall x \in X, \overline{\mathcal{P}_x} \gg$

2.2.3 conjonction

conjonction La conjonction de deux propositions logiques est vraie *ssi* les deux propositions logiques sont vraies \mathcal{P} et \mathcal{Q} est la proposition « \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont vraies »

Définition 2.11 $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) := \ll \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ sont vraies} \gg$

– La conjonction de \mathcal{P} et \mathcal{Q} se prononce et se note « \mathcal{P} et \mathcal{Q} ».

table de vérité La proposition « \mathcal{P} et \mathcal{Q} » est vraie si les deux propositions sont vraies et fausse si l'une au moins des propositions est fausse

Propriété 2.12

\mathcal{P} et \mathcal{Q}	\mathcal{Q} Vrai	\mathcal{Q} Faux
\mathcal{P} Vrai	Vrai	Faux
\mathcal{P} Faux	Faux	Faux

2.2.4 Disjonction inclusive

disjonction
inclusive

Le « ou » mathématique est inclusif contrairement à l'usage traditionnel du « ou » en français. La disjonction (inclusive) de deux propositions est vraie *ssi* l'une au moins des propositions est vraie.

Définition 2.13 $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) :=$ « l'une au moins des propositions \mathcal{P} ou \mathcal{Q} est vraie »

- La disjonction inclusive de \mathcal{P} et \mathcal{Q} se prononce et se note « \mathcal{P} ou \mathcal{Q} ».
- Les symboles \leq et \geq sont des disjonctions inclusives.

$$a \leq b \text{ signifie } \ll a < b \text{ ou } a = b \gg$$

table de vérité

La proposition « \mathcal{P} ou \mathcal{Q} » est vraie si l'une au moins des propositions est vraie et fausse si les deux propositions sont fausses

Propriété 2.14

\mathcal{P} ou \mathcal{Q}	\mathcal{Q} Vrai	\mathcal{Q} Faux
\mathcal{P} Vrai	Vrai	Vrai
\mathcal{P} Faux	Vrai	Faux

négation

Propriété 2.15 $\overline{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}} = \overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\mathcal{Q}}$

Propriété 2.16 $\overline{\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}} = \overline{\mathcal{P}} \text{ et } \overline{\mathcal{Q}}$

2.2.5 Disjonction exclusive

disjonction
exclusive

La disjonction exclusive de deux propositions est vraie *ssi* l'une est vraie et l'autre est fausse.

Définition 2.17 $(\mathcal{P} \text{ xor } \mathcal{Q}) :=$ « l'une exactement des propositions \mathcal{P} ou \mathcal{Q} est vraie ».

- La disjonction exclusive de \mathcal{P} et \mathcal{Q} se note « \mathcal{P} xor \mathcal{Q} ».
- En mathématiques, l'opérateur xor est rarement utilisé, contrairement à l'opérateur ou.

table de vérité

Propriété 2.18

\mathcal{P} xor \mathcal{Q}	\mathcal{Q} Vrai	\mathcal{Q} Faux
\mathcal{P} Vrai	Faux	Vrai
\mathcal{P} Faux	Vrai	Faux

2.2.6 Equivalence

équivalence L'équivalence de deux propositions est la proposition affirmant qu'elles ont la même valeur logique.

Définition 2.19 $(\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}) := \ll \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ ont même valeur logique} \gg$

- L'équivalence de \mathcal{P} et \mathcal{Q} se note « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ ».
- Lorsque l'équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que les propositions \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont équivalentes.
-

$$\begin{aligned} \ll \mathcal{P} \iff \mathcal{Q} \gg &= \ll \text{non } \mathcal{P} \iff \text{non } \mathcal{Q} \gg \\ \text{non } \ll \mathcal{P} \iff \mathcal{Q} \gg &= \ll \mathcal{P} \text{ xor } \mathcal{Q} \gg \end{aligned}$$

table de vérité La proposition « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ » est vraie si les deux propositions sont vraies ou si les deux propositions sont fausses.

Propriété 2.20

$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$	\mathcal{Q} Vrai	\mathcal{Q} Faux
\mathcal{P} Vrai	Vrai	Faux
\mathcal{P} Faux	Faux	Vrai

2.2.7 Implication

implication

Définition 2.21 $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) := \ll \mathcal{P} \text{ faux ou } \mathcal{Q} \text{ vrai} \gg = \ll \overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \mathcal{Q} \gg$

- L'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ se prononce « \mathcal{P} implique \mathcal{Q} ».
- Lorsque l'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que la proposition \mathcal{P} implique la proposition \mathcal{Q} .
- Le vrai implique le vrai et que le faux implique tout.

table de vérité La proposition $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie si \mathcal{P} est fausse ou si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont vraies. La proposition $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est fausse si \mathcal{P} est vraie et si \mathcal{Q} est fausse.

Propriété 2.22

$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$	\mathcal{Q} Vrai	\mathcal{Q} Faux
\mathcal{P} Vrai	Vrai	Faux
\mathcal{P} Faux	Vrai	Vrai

Méthode 2.23 (Pour établir une implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$)

1. Supposer que la proposition \mathcal{P} est vraie
2. Montrer que la proposition \mathcal{Q} est vraie

implication

Définition 2.24 La réciproque de « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ » est l'implication « $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ »

- Une implication et sa réciproque n'ont pas forcément la même valeur logique.

implication

Définition 2.25 La contraposée de « $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ » est l'implication « $\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}}$ »

- Une implication et sa contraposée ont la même valeur logique

Propriété 2.26 $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) = (\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}})$

2.3 Raisonnements classiques

Dans cette section, toutes les lettres majuscules rondes désignent des propositions logiques.

2.3.1 Raisonnement par double implication

Double im-
plication

Pour établir l'équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$, il suffit de démontrer $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

Propriété 2.27 $(\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}) = ((\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}))$

2.3.2 Raisonnement par contraposition

contraposition

Pour établir l'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, il suffit d'établir sa contraposée $\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}}$, ce qui est plus facile dans quelques rares cas.

Propriété 2.28 $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) = (\overline{\mathcal{Q}} \implies \overline{\mathcal{P}})$

- L'implication de droite est la contraposée de celle de gauche (et inversement).

2.3.3 Raisonnement direct

Raisonne-
ment direct

On procède par implication en partant d'une proposition vraie

Propriété 2.29 $(\text{Vrai} \xRightarrow{\text{Vrai}} \mathcal{Q} \xRightarrow{\text{Vrai}} \dots \xRightarrow{\text{Vrai}} \mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$

- C'est le raisonnement de base utilisé par tout le monde.

2.3.4 Raisonnement par équivalences

Raisonnement
par équivalences

On établit une chaîne d'équivalences avec des propositions de plus en plus simples

Propriété 2.30 $\left(\mathcal{P} \stackrel{\text{Vrai}}{\iff} \mathcal{Q} \stackrel{\text{Vrai}}{\iff} \dots \stackrel{\text{Vrai}}{\iff} \text{Vrai} \right) = \mathcal{P}$

– C'est un bon principe de n'utiliser des équivalences que lorsque c'est absolument indispensable, ou pour atteindre plusieurs objectifs à la fois (deux implications).

2.3.5 Raisonnement par l'absurde

Raisonnement
par l'absurde

Pour établir une proposition \mathcal{P} , en raisonnant par l'absurde, on suppose son contraire (i.e. que « non \mathcal{P} » est vraie) puis on procède par implications pour aboutir à une proposition fausse (une absurdité, une contradiction).

Propriété 2.31 $\left(\overset{\text{Supposé}}{\underbrace{\neg \mathcal{P}}_{\text{Vrai}}} \stackrel{\text{Vrai}}{\implies} \mathcal{Q} \stackrel{\text{Vrai}}{\implies} \dots \stackrel{\text{Vrai}}{\implies} \text{Faux} \right) = \mathcal{P}$

– Il est toujours possible de trouver une démonstration directe d'une propriété établie par l'absurde (cela constitue souvent un bon exercice, très formateur, en général plus difficile).

Preuve : Si les implications pré-citées sont justes et si la proposition \mathcal{Z} est fausse, il résulte de la table de vérité de l'implication que les propositions $\mathcal{Z}, \dots, \mathcal{Q}$, non \mathcal{P} sont fausses et donc que la proposition \mathcal{P} est vraie. Par ailleurs, d'après le principe de contraposition, la chaîne d'implication précédente est équivalente à la chaîne d'implication

$$\underbrace{\mathcal{P}}_{\text{Vrai}} \stackrel{\text{Vrai}}{\iff} \text{non } \mathcal{Q} \stackrel{\text{Vrai}}{\iff} \dots \stackrel{\text{Vrai}}{\iff} \underbrace{\text{non } \mathcal{Z}}_{\text{Vrai}}$$

qui prouve la proposition \mathcal{P} de manière directe.

2.3.6 Raisonnement par récurrence

principe de
récurrence

Le raisonnement par récurrence consiste à établir de manière automatique des propositions logiques $\{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots\}$ en procédant en deux étapes :

1. **Initialisation.** On établit la propriété au(x) premier(s) rang(s), de sorte à pouvoir enclencher le mécanisme de transmission.
2. **Transmission.** On prouve que la propriété se transmet du (ou des) rang(s) précédent(s) au rang suivant.

- Il est primordial d'écrire et de quantifier correctement la propriété à établir.
- Lorsque la propriété à établir n'est pas donnée, il faut d'abord l'intuiter puis la démontrer.

recurrence forte
faible
finie
à deux pas

Il existe beaucoup de variations du schéma de démonstration par récurrence. C'est pourquoi il est essentiel de bien comprendre le principe de récurrence pour pouvoir l'adapter aux divers cas rencontrés.

Propriété 2.32 $(\forall k \geq 0, \mathcal{P}_k) = \begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1} \end{cases}$

Propriété 2.33 $(\forall k \geq 0, \mathcal{P}_k) = \begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1} \end{cases}$

Propriété 2.34 $(\forall k \geq 0, \mathcal{P}_k) = \begin{cases} \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_{n-1}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1} \end{cases}$

Propriété 2.35 $(\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \mathcal{P}_k) = \begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1} \end{cases} \quad (0 \leq n < N)$

- L'implication permettant la transmission ne se démontre jamais par récurrence.
- L'implication permettant la transmission détermine comment l'initialisation doit se faire

3 Sommes, produits, récurrences Séquence 3

programme

- Emploi du raisonnement par récurrence
 - Notations \sum , \prod Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^n u_i$ et $\sum_{i \in A} u_i$ où A désigne un sous-ensemble de \mathbb{N} ou \mathbb{N}^2
 - Formules $\sum_{k=0}^n q^k$ et $\sum_{k=1}^n k$.
 - Exemples : formules donnant $\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$
 - Définition de $n!$
- Les outils de ce chapitre font parti des bases importantes. Utilisation en ds/concours :
 - Récurrence : très fréquente (certaines questions se traitent exclusivement par récurrence)
 - Somme : très fréquente (utilisées pour exprimer et manipuler les quantités étudiées dans les problèmes)
 - Produit : rare (on leur préfère les sommes : un produit pouvant généralement être transformé en somme via un logarithme)
- En concours, il ne devrait pas y avoir de problème portant uniquement sur ces notions.

3.1 Sommes

3.1.1 Généralités

Dans cette section a_k et b_k désignent des nombres complexes pour des indices k entiers. Les lettres p, q, r, m et n désignent des entiers.

notation \sum

Définition 3.1 $\sum_{k=m}^n a_k = \begin{cases} a_m + \dots + a_n & (m \leq n) \\ 0 & (m > n) \end{cases}$

- Il existe de multiples variantes de cette notation, comme

$$\sum_{m \leq k \leq n} a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k \in [m, n]} a_k$$

- Par convention, la somme est nulle lorsque l'ensemble de ses indices est vide
- La lettre k utilisée pour décrire ce que l'on somme est dite « muette ». Le choix d'une autre lettre donnerait le même résultat.

relation
de Chasles

Propriété 3.2
$$\sum_{k=p}^r a_k = \sum_{k=p}^q a_k + \sum_{k=q+1}^r a_k \quad (p \leq q \leq r)$$

linéarité

Propriété 3.3
$$\sum_{k=m}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k + \mu \sum_{k=m}^n b_k \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C})$$

– Cette propriété permet de factoriser une constante dans une somme (ou inversement de la développer)

$$\sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k$$

mais aussi de « séparer » en deux sommes, en procédant aux additions dans un ordre différent

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$

changement
d'indice

Propriété 3.4
$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{\ell=m-d}^{n-d} a_{\ell+d} \quad (d \in \mathbb{Z})$$

- Choisir une autre lettre pour décrire les indices de la somme ne change pas sa valeur (c'est une variable « muette ». La valeur de la somme ne dépend que de ses bornes et de son terme général
- Il est souvent utile de commencer par établir la formule du changement d'indice inverse $\ell = k - d$.

Méthode 3.5 (changement d'indice)

Illustration via le changement d'indice $k = \ell + d \iff \ell = k - d$

1. écrire une somme portant sur le nouvel indice

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{\ell=}$$

2. recopier ce que l'on somme en remplaçant l'ancien indice par son expression utilisant le nouvel indice

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{\ell=} a_{\ell+d}$$

3. déterminer les bornes de la nouvelle somme en trouvant les valeurs du nouvel indice correspondant à l'ancien indice

$$\left. \begin{array}{l} k = n \\ k = m \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{k-d=\ell} \\ \xrightarrow{k=\ell+d} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \ell = n - d \\ \ell = m - d \end{array} \right.$$

4. reporter les bornes correctement dans la somme (*échanger les bornes de place si la monotonie de la suite des indices a changé*)

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{\ell=m-d}^{n-d} a_{\ell+d}$$

symétrie

Propriété 3.6
$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{\ell=m}^n a_{n+m-\ell}$$

– Le valeur des deux sommes est la même, les mêmes additions étant effectués dans un ordre différent, respectivement dans l'ordre croissant et décroissant des indices

$$a_m + \dots + a_n = a_n + \dots + a_m$$

sommes té-
léscopiques

Propriété 3.7
$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

– Le principe des sommes télescopiques se décline en de multiples variantes (comme les récurrences). Il faut surtout comprendre en comprendre le principe pour s'adapter.

Méthode 3.8 (somme télescopique) *Illustration avec $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k)$*

1. séparer les sommes

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^n a_{k+1} - \sum_{k=0}^n a_k$$

2. Faire un changement d'indice pour rendre identique ce que l'on somme

$$\sum_{k=0}^n \underbrace{a_{k+1}}_{\ell=k+1} - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{\ell=1}^{n+1} a_\ell - \sum_{k=0}^n a_k$$

3. Garder dans les sommes les termes en commun, sortir ceux qui ne le sont pas

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{\ell=1}^n a_\ell + a_{n+1} - \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \right)$$

4. Simplifier les sommes, qui doivent disparaître.

3.1.2 Identité fondamentale

Dans cette section, x et y désignent des nombres complexes

L'identité suivante interviendra également dans d'autres chapitres. Elle joue un rôle majeur pour les mathématiques

Propriété 3.9
$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \quad (n \geq 0)$$

▷ Factorisation : $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

▷ Sommaton : $1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Identité fon-
damentale

- ▷ Mise sous forme canonique (c)
- ▷ Inversion d'opérateurs

– En notant la somme différemment, on fait apparaître le rôle symétrique de x et y

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k+\ell=n-1} x^k y^\ell$$

Identité remarquable

Sa variante la plus couramment utilisée est celle pour $n = 2$.

Corollaire 3.10 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

- ▷ Calcul mental : $23 \times 17 = 400 - 9$
- ▷ Factorisation : $(x + 2)^2 - 9 = (x - 1) \times (x + 5)$

3.1.3 Sommes de Bernoulli

me des carrés

Propriété 3.11 $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (n \geq 0)$

– On établit cette formule en calculant de deux manières, via les sommes télescopiques et en développant l'expression suivante :

$$(n+1)^3 = \sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1).$$

– Pour $\ell \geq 3$, on peut procéder de manière identique pour calculer la somme $\sum_{k=0}^n k^\ell$.

me des cubes

Propriété 3.12 $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 \quad (n \geq 0)$

3.1.4 Sommes multiples

théorème de Fubini \square

Théorème 3.13 $\sum_{k=b}^c \sum_{\ell=d}^e a_{k,\ell} = \sum_{\ell=d}^e \sum_{k=b}^c a_{k,\ell}$

– La somme précédente peut également être notée

$$\sum_{\substack{b \leq k \leq c \\ d \leq \ell \leq e}} a_{k,\ell}$$

Ce théorème d'interversion de sommes se décline fréquemment dans sa version triangulaire :

théorème de
Fubini \triangle

Théorème 3.14
$$\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k a_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n a_{k,\ell}$$

– La somme double précédente peut également être notée avec un seul symbole somme

$$\sum_{0 \leq k \leq \ell \leq k} a_{k,\ell}$$

Méthode 3.15 (Pour intervertir deux sommes) *illustration via le théorème de Fubini \triangle*

1. Ecrire deux sommes en recopiant ce que l'on somme et en intervertissant les indices de sommation

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k a_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n a_{k,\ell}$$

2. Déterminer et reporter les valeurs constantes extrêmes que peut prendre l'indice de gauche (*ici*, $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq \ell \leq k$ induisent que $0 \leq \ell \leq k \leq n$)

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k a_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n a_{k,\ell}$$

3. Déterminer et reporter les valeurs extrêmes que peut prendre l'indice de droite (*ici*, $0 \leq \ell \leq k \leq n$), qui peuvent dépendre de l'indice de gauche

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k a_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n a_{k,\ell}$$

3.2 Produits et factorielles

3.2.1 Généralités

Dans cette section a_k et b_k désignent des nombres complexes pour des indices k entiers. Les lettres p , q , r , m et n désignent des entiers.

notation \prod

Notation 3.16
$$\prod_{k=m}^n a_k = \begin{cases} a_m \times \cdots \times a_n & (m \leq n) \\ 1 & (m > n) \end{cases}$$

– Comme pour les sommes, il existe de multiples variantes de cette notation, telles

$$\prod_{m \leq k \leq n} a_k \quad \text{ou} \quad \prod_{k \in [m, n]} a_k$$

- Par convention, le produit vaut 1 lorsque l'ensemble de ses indices est vide
- Dans les exercices, il est souvent utile de transformer un produit en somme (via le logarithme) ou une somme en produit (via l'exponentielle). Lorsque $a_k > 0$, nous avons

$$\sum_{k=0}^n \ln(a_k) = \ln \left(\prod_{k=0}^n a_k \right) \quad \text{et} \quad \exp \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) = \prod_{k=0}^n e^{b_k}$$

factorielle

Notation 3.17 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \quad (n \geq 1)$

Convention 3.18 $0! = 1$

Propriété 3.19 $n! = \prod_{k=1}^n k \quad (n \geq 0)$

relation
de Chasles

Propriété 3.20 $\prod_{k=p}^r a_k = \prod_{k=p}^q a_k \times \prod_{k=q+1}^r a_k \quad (p \leq q \leq r)$

produit

Propriété 3.21 $\prod_{k=m}^n (a_k \times b_k) = \prod_{k=m}^n a_k \times \prod_{k=m}^n b_k$

- Le produit est le même mais effectué dans un ordre différent
- En particulier, on a

$$\prod_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n a_k$$

puissances

Propriété 3.22 $\prod_{k=m}^n (a_k)^\ell = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right)^\ell \quad (\ell \in \mathbb{Z} \text{ et } a_k \neq 0 \text{ si } \ell < 0)$

changement
d'indice

Propriété 3.23 $\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{\ell=m-d}^{n-d} a_{\ell+d} \quad (d \in \mathbb{Z})$

symétrie

Propriété 3.24 $\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{\ell=m}^n a_{n+m-\ell}$

- Le valeur des deux produits est la même, les mêmes multiplications étant effectués dans un ordre différent, respectivement dans l'ordre croissant et décroissant des indices

$$a_m \times \cdots \times a_n = a_n \times \cdots \times a_m$$

produits té-
lécopiques

Propriété 3.25 $\prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$ ($a_k \neq 0$ pour $0 \leq k \leq n$)

– Le principe des produits télescopiques se décline en de multiples variantes. En pratique, on sépare les produits

$$\prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{k=0}^n a_{k+1}}{\prod_{k=0}^n a_k}$$

On procède à un changement d'indice (ici $\ell = k + 1$)

$$\prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{\ell=1}^{n+1} a_\ell}{\prod_{k=0}^n a_k}$$

On garde dans les produits ce qui est commun et l'on sort ce qui ne l'est pas

$$\prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{\ell=1}^n a_\ell \times a_{n+1}}{a_0 \times \prod_{k=1}^n a_k}$$

Puis on simplifie pour aboutir au résultat attendu.

4 Ensembles et applications

Séquence 5

programme

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, en vue de préparer l'étude des chapitres d'algèbre linéaire et de probabilité, mais tout exposé théorique est exclu.

- Ensembles, parties d'un ensemble
 - Appartenance. Inclusion. Notations \in, \subset . *On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.*
 - Ensemble $P(E)$ des parties de E . *On pourra donner l'exemple de $P(\{1, \dots, 6\})$ afin de faciliter l'introduction de la notion de tribu.*
 - Complémentaire. Notation \bar{A} . *La notation \bar{A} est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation \mathbb{C}_E^A*
 - Union, intersection. Notations \cap, \cup .
 - Distributivité. Lois de Morgan.
 - Définition du produit cartésien d'ensembles. *On introduira les notations R^2 et R^n .*

- Applications
 - Définition. Composée de deux applications.
 - Restriction et prolongement d'une application.
 - Applications injectives, surjectives, bijectives. *Ces deux notions ne seront introduites que dans les cours d'algèbre linéaire et d'analyse. On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.*

4.1 Ensembles

programme

- Appartenance. Inclusion. Notations \in, \subset .
- Ensemble $P(E)$ des parties de E .
- Complémentaire. La notation \bar{A} est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation \mathbb{C}_E^A
- Union, intersection. Notations \cap, \cup . Distributivité. Lois de Morgan.
- Définition du produit cartésien d'ensembles. R^2 et R^n
- lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques

ensemble

Définition 4.1 Un ensemble est une collection d'objets

- La propriété fondamentale d'un ensemble est la capacité à déterminer si un objet quelconque lui appartient ou non.

élément

Définition 4.2 Un élément d'un ensemble E est un objet appartenant à E

- On note $x \in E$ lorsque l'objet x appartient à l'ensemble E et $x \notin E$ dans le cas contraire
- En particulier, E est un ensemble *ssi* l'assertion $x \in E$ est une proposition logique pour tout x (de même que sa négation $x \notin E$)

ensemble vide

L'ensemble vide \emptyset est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Définition 4.3 $\emptyset = \{\}$

- L'ensemble vide est unique.

Dans la suite de cette section, I , A , B et C désignent des ensembles, de même que A_i pour $i \in I$.

inclusion

Un ensemble A est inclus dans un ensemble B *ssi* tous les éléments de A sont dans B .

Définition 4.4 $A \subset B \iff (\forall a \in A, a \in B)$

- Lien logique : $A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B)$

double inclusion

Deux ensembles sont égaux *ssi* ils ont les mêmes éléments

Propriété 4.5 $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \iff (A = B)$

- Cette propriété est en fait l'axiome d'extensionnalité de Zermelo
- Lien logique : $A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$

Sous-ensemble partie

Tout ensemble B inclus dans un ensemble A est appelé une partie de A ou un sous-ensemble de A .

Définition 4.6 B partie de $A \iff B \subset A$

Ensemble des parties

L'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensemble A est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de A .

Définition 4.7 $\mathcal{P}(A) := \{B : B \subset A\}$

- Lien logique : $A \in \mathcal{P}(B) \iff A \subset B$

intersection L'intersection de deux ensembles est l'ensemble constitué par les éléments communs aux deux ensembles

Définition 4.8 $A \cap B := \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$

– Lien logique : $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$

intersection multiple L'intersection d'une famille d'ensembles est l'ensemble constitué par les éléments communs à tous les ensembles de la famille

Définition 4.9 $\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}$

– Lien logique : $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I, x \in A_i)$

réunion La réunion de deux ensembles est l'ensemble constitué par les éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles

Définition 4.10 $A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$

– Lien logique : $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$

distributivité

Propriété 4.11 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

réunion multiple La réunion d'une famille d'ensembles est l'ensemble constitué par les éléments appartenant à au moins l'un des ensembles de la famille

Définition 4.12 $\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}$

– Lien logique : $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i \in I, x \in A_i)$

complémentaire Le complémentaire d'un ensemble A dans un ensemble B est formé des éléments de B qui ne sont pas dans A (c'est B privé des éléments de A).

Définition 4.13 $\complement_B(A) := \{x \in B : x \notin A\} =: B \setminus A$

– Pour simplifier les notations et lorsqu'il est évident que les complémentaires sont calculés dans un ensemble D , on note parfois $\bar{A} = \complement_D(A)$.

– Lien logique : $x \in \bar{A} \iff x \in A \iff x \notin A$

– Lien logique : $x \in B \setminus A \iff x \in B \text{ et } x \notin A$

involution

Propriété 4.14 $\overline{\overline{A}} = A$

lois de Morgan

Propriété 4.15 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

disjonction Deux ensembles sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun

Définition 4.16 A et B disjoints $\iff A \cap B = \emptyset$

– Des ensembles Ω_i pour $i \in I$ sont disjoints s'ils sont disjoints deux à deux.

**partition
système complet**

Une partition de A est une famille de parties de A disjoints deux à deux dont la réunion vaut A .

Définition 4.17 $(\Omega_i)_{i \in I}$ $\left| \begin{array}{l} \text{partition} \\ \text{système complet} \end{array} \right.$ de $A \iff \begin{cases} \Omega_i \subset A & (i \in I) \\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset & (i \neq j) \\ \bigcup_{i \in I} \Omega_i = A \end{cases}$

▷ Probabilités

**produit
cartésien**

Le produit cartésien de deux ensembles est l'ensemble des couples constitués par les éléments de ces ensembles

Définition 4.18 $A \times B := \{(a,b) : a \in A \text{ et } b \in B\}$

– Lien logique : $(x,y) \in A \times B \iff (x \in A \text{ et } y \in B)$

– Par « abus » de notation : $A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C) = \{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$

**produit
cartésien
multiple**

Définition 4.19 $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}} \quad (n \geq 1)$

– Lien logique : $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A^n \iff (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in A)$

4.2 Fonctions et applications

programme

- Définition. Composée de deux applications.
- Restriction et prolongement d'une application.
- Applications injectives, surjectives, bijectives.

Dans cette section, A et B désignent des ensembles et $f \subset A \times B$.

4.2.1 Fonctions

fonction Une fonction f de A dans B est une partie $f \subset A \times B$ associant au plus une image de B à chaque élément de A

Définition 4.20 Une fonction $f : A \rightarrow B$ est une partie $f \subset A \times B$ vérifiant

pour chaque $x \in A$, il existe **au plus** un $y \in B$ tel que $(x, y) \in f$

– $F \subset A \times B$ est une fonction *ssi* pour chaque élément x de A , il existe **au plus** un élément y de B tel que $(x, y) \in F$.

– Sur un plan plus théorique, une fonction est un triplet (A, B, F) avec $F \subset A \times B$ vérifiant la propriété ci-dessus

Dans la suite de cette section, $f : A \rightarrow B$ désigne une fonction.

**image
antécédent**

Définition 4.21 x antécédent par f de y de y image par f de x $\left| \begin{array}{l} y = f(x) \iff (x, y) \in f \end{array} \right.$

**ensemble de
définition**

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ auxquels la fonction associe une image

Définition 4.22 $\mathcal{D}f := \{x \in A : \exists y \in B, y = f(x)\}$

**restriction
au départ
à l'arrivée**

A partir d'une fonction $f : A \rightarrow B$, on appelle restriction de f au départ à C ou/et à l'arrivée à D les fonctions obtenues en posant

Définition 4.23 $f|_C : C \rightarrow B \quad (C \subset A)$
 $x \mapsto f(x)$

Définition 4.24 $f|_D : A \rightarrow D \quad (D \subset B)$
 $x \mapsto f(x)$

Définition 4.25 $f|_C^D : C \rightarrow D \quad (C \subset A, D \subset B)$
 $x \mapsto f(x)$

4.2.2 Applications

application

Une application $f : A \rightarrow B$ associe à chaque élément x de A une **unique** image y dans B .

Définition 4.26 Une application de A dans B est une fonction $f : A \rightarrow B$ vérifiant

$$\forall x \in A, \exists ! y \in B : y = f(x)$$

– Dans tout le reste du cours, on notera $f : A \rightarrow B$ pour désigner une application de A dans B .

ensemble

Définition 4.27 $\mathcal{F}(A, B) = \{f : A \rightarrow B \text{ application}\} = B^A$

image
directe

L'image d'un ensemble $C \subset A$ par une application $f : A \rightarrow B$ est l'ensemble

Définition 4.28 $f(C) := \{f(x) : x \in C\} \quad (C \subset A)$

image
réciproque

L'image réciproque d'un ensemble $D \subset B$ par une application $f : A \rightarrow B$ est l'ensemble

Définition 4.29 $f^{-1}(D) := \{x \in A : f(x) \in D\} \quad (D \subset B)$

restrictions

Propriété 4.30 Soient $f : A \rightarrow B$ une fonction et deux ensembles $C \subset A$ et $D \subset B$. Alors,

$$f|_C^D \text{ application} \iff \begin{cases} C \subset \mathcal{D}f \\ f(C) \subset D \end{cases}$$

– La restriction d'une application au départ est une application. Autrement dit, on peut toujours restreindre une application au départ (et obtenir une application).

– La restriction d'une application à l'arrivée n'est pas forcément une application. Autrement dit, il faut faire attention lorsque l'on restreint une application à l'arrivée.

Corollaire 4.31 La restriction d'une fonction f au départ à $\mathcal{D}f$ est une application

– Etant donnée une fonction $f : A \rightarrow B$, on détermine d'abord l'ensemble de définition $\mathcal{D}f$, puis on ne travaille plus qu'avec l'application $f|_{\mathcal{D}f}$: c'est plus pratique !

composition

La composée de $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ est l'application définie par

Définition 4.32 La composée de l'application $f : A \rightarrow B$ par l'application $g : B \rightarrow C$ est l'application définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

associativité

La loi de composition \circ des applications est associative.

Propriété 4.33 Soient $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$, des applications. Alors,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

– Cette composée est notée plus simplement $h \circ g \circ f$.

4.2.3 Injections, surjections et bijections

Dans toute cette section $f : A \rightarrow B$ est une application et A et B sont des ensembles non-vides

injection Une application est injective *ssi* chaque élément à l'arrivée admet au plus un antécédent au départ.

Définition 4.34 f injective $\iff (\forall x \in A, \forall x' \in A, f(x) = f(x') \implies (x = x'))$

– Une application est injective *ssi* elle associe deux images différentes à deux éléments différents.

– Une application injective s'appelle une injection

surjection Une application est surjective *ssi* chaque élément à l'arrivée admet au moins un antécédent au départ.

Définition 4.35 f surjective $\iff f(A) = B$

Propriété 4.36 f surjective $\iff (\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x))$

– Une application surjective s'appelle une surjection

Une application est bijective *ssi* elle est injective et surjective.

Définition 4.37 f bijective $\iff \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$

Propriété 4.38 f bijective $\iff (\forall y \in B, \exists! x \in A : y = f(x))$

– Une fonction f de A dans B est bijective *ssi* chaque élément au départ admet une image à l'arrivée et chaque élément à l'arrivée admet un antécédent au départ

– Une application $f : A \rightarrow B$ est bijective *ssi* pour chaque y à l'arrivée, l'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution au départ.

Méthode 4.39 (étudier si une application $f : A \rightarrow B$ est injective, surjective ou bijective)

1. Fixer un élément $y \in B$ quelconque.
2. Résoudre l'équation $y = f(x)$.
3. Si **pour chaque élément $y \in B$** , il y a :
 - a. au plus une solution $x \in A$, f est surjective
 - b. au moins une solution $x \in A$, f est injective
 - c. exactement une solution $x \in A$, f est bijective.
 De plus, on trouve une formule pour la bijection réciproque : $f^{-1}(y) = x$.

composition La composée de deux bijections est une bijection.

Propriété 4.40 Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, bijectives. Alors, $g \circ f$ est une bijection

identité L'application identité Id_A d'un ensemble A est définie de la façon suivante

Définition 4.41 $\text{Id}_A : A \rightarrow A$
 $x \mapsto x$

Propriété 4.42 L'identité de A est une bijection ($\text{Id}_A \circ \text{Id}_A = \text{Id}_A$)

réciproque La bijection réciproque $f^{-1} : B \rightarrow A$ d'une bijection $f : A \rightarrow B$ est l'application définie par

Définition 4.43 La bijection réciproque $f^{-1} : B \rightarrow A$ d'une bijection $f : A \rightarrow B$ est l'application définie par

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \quad (x \in A, y \in B)$$

– Pour chaque élément y de B , $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans A de y par f .

inverse

Propriété 4.44 Soit $f : A \rightarrow B$ bijection, alors $g = f^{-1} \iff \begin{cases} f \circ g = \text{Id}_B \\ g \circ f = \text{Id}_A \end{cases}$

– La bijection réciproque de f est l'inverse de f pour la loi \circ .

Corollaire 4.45 Soit $f : A \rightarrow B$, une bijection. Alors, f^{-1} est bijective

– L'inverse d'une bijection pour la loi \circ est une bijection.

4.3 Combinatoire

Séquence 7

programme Dénombrement (cardinal) des ensembles suivants :

- parties d'un ensemble à n éléments
- parties à p éléments d'un ensemble à n éléments
- p -listes d'un ensemble à n éléments
- p -listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments
- permutations d'un ensemble à n éléments.

On fera le lien entre les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.

On pourra utiliser la représentation arborescente d'un ensemble de p -listes dans les problèmes de dénombrement.

Dans cette section, les lettres majuscules désignent des ensembles. Deux ensembles sont dits « en bijection » ou equipotents *ssi* il existe une bijection de l'un dans l'autre.

4.3.1 Cardinal

partie finie
de \mathbb{N}

Définition 4.46 Une partie de \mathbb{N} est finie *ssi* elle est majorée

intervalle
d'entiers

Définition 4.47 $\llbracket m : n \rrbracket := \{k \in \mathbb{Z} : m \leq k \leq n\}$ ($m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$)

– Pour deux entiers $m \leq n$, on rencontre également la notation $\{m, \dots, n\}$.

cardinal

A chaque ensemble E , on associe un cardinal (son nombre d'éléments).

Définition 4.48 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\text{card}(E) = n$ *ssi* $\llbracket 1 : n \rrbracket$ et E sont en bijection

Convention 4.49 $\text{card}(\emptyset) = 0$

– Lorsque $E = \emptyset$ ou lorsque E est en bijection avec $\llbracket 1 : n \rrbracket$, le cardinal $\text{card}(E)$ est dit fini. Il est dit infini dans le cas contraire.

ensemble fini

Définition 4.50 Un ensemble est fini *ssi* il est en bijection avec une partie finie de \mathbb{N}

Propriété 4.51 E fini $\iff \text{card}(E)$ fini

- Un ensemble est fini *ssi* il existe une injection de cet ensemble dans une partie finie de \mathbb{N} .
- Un ensemble est fini *ssi* il existe une surjection d'une partie finie de \mathbb{N} dans cet ensemble.

† ensemble
dénombrable

Définition 4.52 Un ensemble est dénombrable *ssi* il est en bijection avec une partie de \mathbb{N}

Propriété 4.53 Un ensemble est dénombrable *ssi* il existe une injection de cet ensemble dans \mathbb{N} .

Propriété 4.54 Un ensemble est dénombrable *ssi* il existe une surjection de \mathbb{N} dans cet ensemble.

Théorème 4.55 \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} et \mathbb{Q} sont dénombrables mais \mathbb{R} et \mathbb{C} ne le sont pas.

équipotence
finie

Propriété 4.56 Soit E un ensemble fini. Alors, F en bijection avec $E \iff \text{Card}(F) = \text{Card}(E)$

inclusion
injection
surjection

Propriété 4.57 Soit E un ensemble fini. Alors, $\left. \begin{array}{l} F \subset E \\ \exists \text{ injection } F \rightarrow E \\ \exists \text{ surjection } E \rightarrow F \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} F \text{ fini} \\ \text{Card}(F) \leq \text{Card}(E) \end{array} \right.$

égalité

Propriété 4.58 Soit $F \subset E$ fini, alors $F = E \iff \text{card}(F) = \text{card}(E)$

lien

Propriété 4.59 Soit f application entre ensembles **de même cardinal fini**, alors f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective

4.3.2 Opérations

Dans cette section E et F désignent des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p

réunion
intersection

Propriété 4.60 $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$

– Si E et F sont disjoints, on a

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$$

– Si E_1, E_2, \dots, E_n sont des ensembles disjoints deux à deux, on a

$$\text{Card}\left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} E_k\right) = \text{Card}(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \text{Card}(E_1) + \dots + \text{Card}(E_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \text{Card}(E_k).$$

duit cartésien

Propriété 4.61 $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) = np$

- Si E est de cardinal fini et $n \geq 1$, alors

$$\text{Card}(E^n) = \text{Card}(E)^n$$

ensemble
des parties

Propriété 4.62 $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)} = 2^n$

applications

Propriété 4.63 $\text{Card}(F^E) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)} = p^n$

C'est le nombre de p -listes d'un ensemble à n éléments

permutations
bijections

Propriété 4.64 $\text{Card}(\{\text{bijection } E \rightarrow E\}) = \text{Card}(E)! = n!$

C'est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

arrangements
injections

Propriété 4.65 $\text{Card}(\{\text{injection } F \rightarrow E\}) = A_n^p := \frac{n!}{(n-p)!} \quad (n \geq p)$

C'est le nombre de p -listes sans répétition d'un ensemble à n éléments

- Le nombre A_n^p est aussi le nombre de façons d'arranger (d'établir une liste ordonnée) de p éléments choisis parmi n .

combinaisons
parties à k
éléments

Propriété 4.66 $\text{Card}(\{F \subset E : \text{Card}(F) = p\}) = \binom{n}{p} \quad (0 \leq p \leq n)$

C'est le nombre de combinaisons (de listes non-ordonnées) de p éléments choisis parmi n

- Le nombre $\binom{n}{p}$ est le nombre de combinaisons (de listes non-ordonnées) de p éléments choisis parmi n .

Ensembles fondamentaux

5 Ensemble \mathbb{R} des nombres réels Séquence 4

programme

- Valeur absolue. Inégalité triangulaire
- Partie entière d'un réel.
Notation $\lfloor x \rfloor$. La notation $E(\cdot)$ est réservée à l'espérance mathématique.
- Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de \mathbb{R} .
Quand il existe, le maximum de A coïncide avec la borne supérieure de A .
- Théorème de la borne supérieure. *Résultat admis.*

5.1 Ordre réel

Dans cette section, x, s, S désignent des nombres réels et A désigne une partie de \mathbb{R} .
 Pour simplifier les énoncés mathématiques, nous allons employer les notations suivantes

Notation 5.1 non standard $\left\{ \begin{array}{l} A \leq x \iff a \leq x \quad (a \in A) \\ x \leq A \iff x \leq a \quad (a \in A) \end{array} \right.$

minorant majorant

Un minorant (resp. majorant) d'un ensemble est un nombre inférieur (resp. supérieur) ou égal à tous les éléments de l'ensemble.

Définition 5.2 x minorant de $A \iff x \leq A$

Définition 5.3 x majorant de $A \iff A \leq x$

- Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite minorée (resp. majorée) si elle admet un minorant (resp. un majorant).
- Les minorants et majorants de A , lorsqu'ils existent, ne sont pas uniques et n'appartiennent pas forcément à A .

plus petit plus grand élément

Le plus petit (resp. grand) élément d'une partie de \mathbb{R} est l'unique minorant (resp. majorant) de cette partie qui lui appartient.

Définition 5.4 x plus petit élément de $A \iff x \in A$ et $x \leq A$

Définition 5.5 x plus grand élément de $A \iff x \in A$ et $A \leq x$

- S'il existe, le plus petit (resp. grand) élément de A est unique et il est noté $\min A$ (resp. $\max A$).
- Un ensemble fini et non vide de nombres réels admet toujours un plus petit et un plus grand élément.

- Le plus petit (resp. grand) élément de A est le plus grand des minorants (resp le plus petit des majorants) de A .

borne inférieure
borne supérieure

Définition 5.6 $S = \sup A \iff A \leq S$ et $\exists a \in A^{\mathbb{N}}, \lim a = S$

Définition 5.7 $s = \inf A \iff s \leq A$ et $\exists a \in A^{\mathbb{N}}, \lim a = s$

- Lorsqu'elle existe, la borne supérieure (resp. inférieure) de A est unique et on la note $\sup A$ (resp. $\inf A$).

- Par convention, on note $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$. De même, on note $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$) pour chaque partie A de \mathbb{R} non majorée (resp. non minorée).

existence

Propriété 5.8 Toute partie majorée non vide de \mathbb{R} admet une borne supérieure

Propriété 5.9 Toute partie minorée non vide de \mathbb{R} admet une borne inférieure

- Une borne supérieure (resp. inférieure) n'est pas forcément un plus petit (resp. un plus grand) élément. Ainsi,

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

6 Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes Séquence 18

programme L'objectif de l'étude des nombres complexes est d'aboutir au théorème de d'Alembert-Gauss et à la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ de polynômes à coefficients réels. La construction de \mathbb{C} est hors programme et les acquis de la classe de terminale seront complétés. On évitera toute manipulation trop technique faisant intervenir les nombres complexes. Les résultats concernant les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ne sont pas exigibles des étudiants.

- Notation algébrique d'un nombre complexe,
- partie réelle et partie imaginaire.
- Conjugué d'un nombre complexe.
- Notation exponentielle. Module, argument.
- Formules d'Euler et de Moivre. *On donnera l'interprétation géométrique d'un nombre complexe.*
- Formules donnant $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$. *Brève révision de la trigonométrie. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité pourront être étudiées comme exemples d'utilisation de la notation exponentielle.*

6.1 Forme algébrique

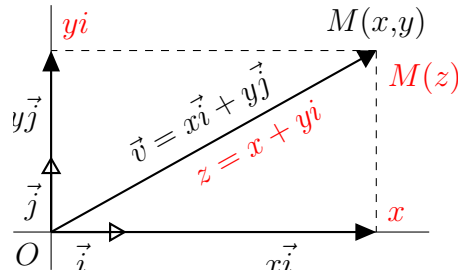
6.1.1 Généralités

nombre complexe Dans cette section, x, x', y et y' désignent des nombres réels

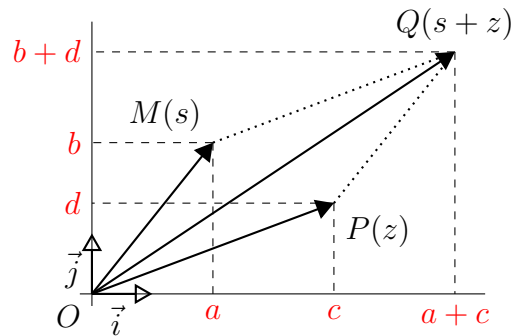
Définition 6.1 Un nombre complexe est un nombre du type $z = x + iy$ avec x, y réels et $i^2 = -1$.

Définition 6.2 $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

Définition 6.3 $(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

Propriété 6.4

Propriété 6.5 Géométriquement, l'addition de deux nombres complexes $s = a + ib$ et $z = c + id$ s'interprète par la règle du parallélogramme : en effet, les points O , M , P et Q , d'affixes respectives 0 , s , z et $s + z$, forment un parallélogramme.



6.1.2 Parties réelles et imaginaires

partie réelle
imaginaire

Définition 6.6 Pour x et y réels, les parties réelles et imaginaires du complexe $z = x + iy$ sont les nombres réels $\Re(z) := x$ et $\Im(z) := y$

Propriété 6.7 $\Re(\lambda s + \mu z) = \lambda \Re(s) + \mu \Re(z)$
 $\Im(\lambda s + \mu z) = \lambda \Im(s) + \mu \Im(z)$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$)

Propriété 6.8 $s = z \iff \begin{cases} \Re(s) = \Re(z) \\ \Im(s) = \Im(z) \end{cases}$

Propriété 6.9 Un nombre réel est un nombre complexe de partie imaginaire nulle
 $z \in \mathbb{R} \iff \Re(z) = z \iff \Im(z) = 0 \iff \bar{z} = z$

Propriété 6.10 Un nombre imaginaire pur est un nombre complexe de partie réelle nulle
 $z \in i\mathbb{R} \iff \Re(z) = 0 \iff i\Im(z) = z \iff \bar{z} = -z$

6.1.3 Conjugaison

Dans cette section, s et z désignent des nombres complexes

Définition 6.11 Pour x et y réels, le conjugué de $z = x + iy$ est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$

Propriété 6.12

$$\begin{cases} z = \Re(z) + i\Im(z) \\ \bar{z} = \Re(z) - i\Im(z) \end{cases} \quad \begin{cases} \Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ \Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Propriété 6.13 $\overline{\lambda s + \mu z} = \lambda \bar{s} + \mu \bar{z}$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$)

Propriété 6.14 $\overline{s \times z} = \bar{s} \times \bar{z}$

Propriété 6.15 $\frac{\bar{s}}{z} = \frac{\bar{s}}{\bar{z}}$ ($z \neq 0$)

Propriété 6.16 $\bar{s}^n = \overline{s^n}$ ($n \in \mathbb{Z}, s \neq 0$ si $n < 0$)

Propriété 6.17 $\overline{\bar{z}} = z$

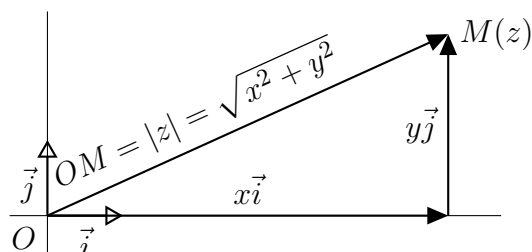
6.2 Forme trigonométrique

6.2.1 Module

Dans cette section, s et z désignent des nombres complexes

Définition 6.18 Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif ou nul $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété 6.19



Propriété 6.20 $|z| \in \mathbb{R}_+$

Propriété 6.21 $|z| = 0 \iff z = 0$

Propriété 6.22 $||s| - |z|| \leq |s + z| \leq |s| + |z|$

Propriété 6.23 $|z| = |\bar{z}|$

Propriété 6.24 $|s \times z| = |s| \times |z| \quad (s \neq 0)$

Propriété 6.25 $\left| \frac{s}{z} \right| = \frac{|s|}{|z|} \quad (s \neq 0)$

Propriété 6.26 $|z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{Z}, z \neq 0 \text{ si } n < 0)$

Propriété 6.27 $|z|^2 = z\bar{z}$

Propriété 6.28 $\begin{cases} |\Re(z)| \leq |z| \\ |\Im(z)| \leq |z| \end{cases}$

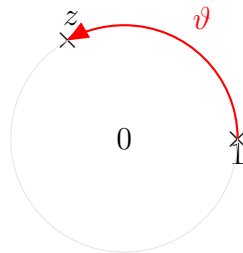
Propriété 6.29 $\underbrace{|x|}_{\text{module}} = \underbrace{|x|}_{\text{valeur absolue}} \quad (x \in \mathbb{R})$

Méthode 6.30 (pour mettre le quotient $1/z$ sous forme algébrique) Multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué de z .

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

6.2.2 Argument

Définition 6.31 L'argument d'un nombre complexe z de module 1 est la longueur θ en radian de l'arc du cercle trigonométrique allant de 1 à z dans le sens direct. Cette longueur, qui est unique modulo 2π , est notée $\arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}$.



L'argument d'un nombre complexe $z \neq 0$ est l'argument de $z/|z|$.

Propriété 6.32 $s = z \iff \begin{cases} |s| = |z| \\ \arg(s) \equiv \arg(z) \pmod{2\pi} \end{cases}$

Propriété 6.33 $\arg(z \times s) = \arg(z) + \arg(s) \quad [2\pi]$

Propriété 6.34 $\arg\left(\frac{z}{s}\right) = \arg(z) - \arg(s) \quad [2\pi]$

Propriété 6.35 $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$

Propriété 6.36 $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$

6.2.3 Exponentielle complexe

Définition 6.37 L'exponentielle réelle $x \mapsto e^x$ est la bijection réciproque du logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$. En d'autres termes

$$y = e^x \iff x = \ln(y) \quad (y > 0, x \in \mathbb{R})$$

Propriété 6.38 L'exponentielle réelle est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et $(e^x)' = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$

Définition 6.39 L'exponentielle d'un nombre imaginaire pur $i\theta$ est l'unique nombre complexe z de module 1 et d'argument θ

Définition 6.40 $e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

Corollaire 6.41 $|e^z| = e^{\Re(z)}$ et $\arg(e^z) \equiv \Im(z) \quad [2\pi]$

Corollaire 6.42 $e^z = e^s \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = s + 2\pi ik$

Propriété 6.43 $e^z = 1 \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, z = 2\pi ki)$

Théorème 6.44 $e^{z+s} = e^z \times e^s \quad (z \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C})$

Corollaire 6.45 $\frac{1}{e^z} = e^{-z} \quad (z \in \mathbb{C})$

Corollaire 6.46 $e^{z-s} = \frac{e^z}{e^s} \quad (z \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C})$

Corollaire 6.47 $e^{nz} = (e^z)^n \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z})$

Propriété 6.48 $z^n = 1 \iff (\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, z = e^{\frac{2\pi ik}{n}}) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Propriété 6.49 $e^z \neq 0 \quad (z \in \mathbb{C})$

6.2.4 Forme trigonométrique

Définition 6.50 $z = |z|e^{i \arg(z)}$ ($z \in \mathbb{C}^*$)

Propriété 6.51 $\forall z \in \mathbb{C}, \exists ! r \geq 0, \exists \underbrace{\vartheta \in]-\pi, \pi]}_{\text{unique si } \vartheta \neq 0}, z = re^{i\vartheta}$

6.3 Trigonométrie

6.3.1 cosinus et sinus

Définition 6.52 $\cos(\vartheta) = \Re(e^{i\vartheta})$
 $\sin(\vartheta) = \Im(e^{i\vartheta})$ ($\vartheta \in \mathbb{R}$)

Propriété 6.53 $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$ ($\vartheta \in \mathbb{R}$)

Propriété 6.54 Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques et π -antipériodiques sur \mathbb{R}

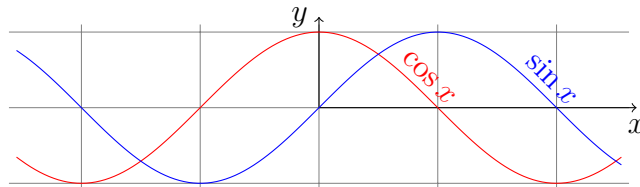
$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos(x) & \text{et} & & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) & (x \in \mathbb{R}) \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) & \text{et} & & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Propriété 6.55 La fonction cosinus est paire sur \mathbb{R} et la fonction sinus est impaire sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Propriété 6.56 Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \\ \sin'(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{R})$$



Propriété 6.57 $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ ($x \in \mathbb{R}$)

Propriété 6.58 $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$)

Corollaire 6.59

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 & (x \in \mathbb{R}) \\ \sin(2x) &= 2\sin x \cos x\end{aligned}$$

Propriété 6.60 $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad (\vartheta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z})$

Propriété 6.61 $\cos x = \cos y \iff \underbrace{x \equiv y \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y \quad [2\pi]}_{x \equiv \pm y \quad [2\pi]}$

Propriété 6.62 $\sin x = \sin y \iff x \equiv y \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y \quad [2\pi]$

6.3.2 tangente

Dans cette section, x , a et b désignent des nombres réels

Définition 6.63 La fonction tangente est la fonction définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Propriété 6.64 $\tan = \{x \in \mathbb{R} : x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]\}$

Propriété 6.65 La fonction tangente est π -périodique sur son ensemble de définition

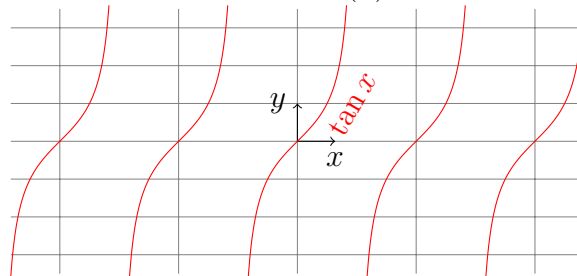
$$\tan(x + \pi) = \tan(x) \quad (x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi])$$

Propriété 6.66 La fonction tangente est impaire sur son ensemble de définition

$$\tan(-x) = -\tan(x) \quad (x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi])$$

Propriété 6.67 La fonction tangente est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition et

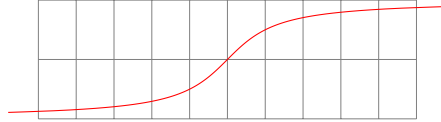
$$\tan'(x) = \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad (x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi])$$



Propriété 6.68 $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad (a, b \text{ et } a + b \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi])$

6.3.3 arctangente

Définition 6.69 La fonction arctangente $\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la bijection réciproque de la restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente



Propriété 6.70 La fonction arctangente est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Analyse

7 Suites

Séquence 4

programme

- Limite d'une suite, suites convergentes.
On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n , sauf pour un nombre fini d'entre eux.
 On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire une utilisation systématique.
 - Généralisation aux suites tendant vers $\pm\infty$.
 - Unicité de la limite.
 - Opérations algébriques sur les suites convergentes.
 - Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.
 - Existence d'une limite par encadrement.
 - Suites monotones, croissantes, décroissantes, suites adjacentes.
 - Théorème de limite monotone.
Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étant la borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite.
 - Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
 - Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.
 - Rappel des croissances comparées.
Comparaisons des suites $(n!)$, (n^a) , (q^n) , $(\ln(n)^b)$
- Les outils de ce chapitre font partie des bases importantes, ils sont utilisés en concours pour :
- Reconnaître le type d'une suite et identifier ses éléments caractéristiques
 - Trouver une formule pour u_n
 - Utiliser la somme des termes d'une suite au cours d'un calcul complexe.
- Utilisation en ds/concours : fréquente.

7.1 Généralités

Dans cette section, I désigne une partie non vide de \mathbb{N} .

suite Une suite de nombres est essentiellement une liste ordonnée de nombres finie ou non, chaque élément de la liste étant uniquement déterminé par son indice.

Définition 7.1 Une suite d'éléments de \mathbb{R} indexée par I est une application $u : I \rightarrow \mathbb{R}$

- La suite $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ sera noté plus simplement $u = (u_n)_{n \in I}$.
- La plupart du temps, nous auront $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}^*$.

– Bien qu’elles soient définies à l’aide d’applications, nous n’allons pas nous servir des suites comme nous nous servons des fonctions.

ensemble L’ensemble des suites d’éléments de \mathbb{R} indicées par I est noté \mathbb{R}^I .

Définition 7.2 $\mathbb{R}^I = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

– Cette nouvelle notation de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, l’ensemble des applications de I dans \mathbb{R} , permet de bien marquer la différence d’usage du même objet, vu comme une suite ou comme une application.

Dans la suite de cette section, u et v désignent des suites de \mathbb{R}^I .

addition multiple produit La somme (resp. Le produit) des suites est la suite des sommes (resp. produits).

Définition 7.3 $(u + v)_n := u_n + v_n \quad (n \in I)$

Définition 7.4 $(\lambda \cdot u)_n := \lambda u_n \quad (\lambda \in \mathbb{R}, n \in I)$

Définition 7.5 $(u \times v)_n := u_n v_n \quad (n \in I)$

– Les relations précédentes affirment essentiellement que

$$\begin{cases} (\lambda u + \mu v)_n &= \lambda u_n + \mu v_n \\ (u \times v)_n &= u_n \times v_n \end{cases} \quad (n \in I).$$

algèbre Les lois $+$, \cdot et \times des suites héritent leurs propriétés (associativité, commutativité, distributivité, existence d’éléments neutres et d’inverses) des lois $+$, \cdot , \times de \mathbb{R} .

Propriété 7.6 On calcule dans $(\mathbb{R}^I, +, \cdot, \times)$ comme dans $(\mathbb{R}, +, \cdot, \times)$.

– La suite nulle $0 = (0)_{n \in I}$ est un élément neutre pour la loi $+$ des suites

$$0 + u = u + 0 = u \quad (u \in \mathbb{R}^I).$$

– La suite constante $1 = (1)_{n \in I}$ est un élément neutre pour la loi \times des suites

$$1 \times u = u \times 1 = u \quad (u \in \mathbb{R}^I).$$

décalage d’indice A partir d’une suite, on peut en fabriquer d’autres en décalant ses éléments

Propriété 7.7 Pour $d \in \mathbb{Z}$, la translatée $\mathcal{T}_d(u)$ de la suite u est la suite $w \in \mathbb{R}^{d+I}$ définie par

$$w_n := u_{n-d} \quad (n \in d + I)$$

– Pour $d \geq 0$, les suites $(u_{n+d})_{n \geq -d}$ et $(u_{n-d})_{n \geq d}$ possèdent les mêmes éléments que u , décalés de d vers la gauche (resp. vers la droite).

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 n & 0 & 1 & \cdots & d & d+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots \\
 u_n & u_0 & u_1 & \cdots & u_d & u_{d+1} & \cdots & u_n & u_{n+1} & \cdots \\
 u_{(n+d)} & u_d & u_{d+1} & \cdots & u_{2d} & u_{2d+1} & \cdots & u_{n+d} & u_{n+d+1} & \cdots \\
 u_{n-d} & & & \cdots & u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-d} & u_{n-d+1} & \cdots
 \end{array}$$

– En pratique, il est aussi utile de restreindre les indices de la suite translatée, en considérant, par exemple $(u_{n+d})_{n \geq 0}$ au lieu de $(u_{n+d})_{n \geq -d}$

restriction d'indice

Lorsqu'on s'intéresse aux éléments d'une suite à partir d'un certain rang, il est possible de se ramener à une suite indicée sur \mathbb{N} , via une translation et une restriction d'indices

Propriété 7.8 Pour $N \in \mathbb{Z}$ et $I_N := \{n \in I : n \geq N\}$, la suite $(u_n)_{n \in I_N}$ appartient à \mathbb{R}^{I_N}

7.2 Suites fondamentales

Séquence 1

- Les outils de cette section font parti des bases importantes, ils sont utilisés en concours pour :
 - Reconnaître le type d'une suite et identifier ses éléments caractéristiques
 - Trouver une formule pour u_n
 - Utiliser la somme des termes d'une suite au cours d'un calcul complexe.
- Utilisation en ds/concours : fréquente.

7.2.1 Suites arithmétiques

Dans cette section, r désigne un nombre de \mathbb{R} .

suite arithmétique raison

Définition 7.9 u arithmétique de raison $r \iff u_{n+1} - u_n = r \quad (n \geq 0)$

– Une suite est dite arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant en lui ajoutant la même constante

$$u \text{ suite arithmétique} \iff (\exists r \in \mathbb{R} : u \text{ suite arithmétique de raison } r).$$

expression

Propriété 7.10 u arithmétique de raison $r \iff u_n = u_0 + nr \quad (n \geq 0)$

- u diverge si $|r| \neq 0$.
- u est constante si $r = 0$.

somme

La somme des termes d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne des termes aux extrémités

Propriété 7.11 Soit u une suite arithmétique de raison r . Alors,

$$\sum_{m \leq k \leq n} u_k = \frac{u_m + u_n}{2} (n - m + 1) = \text{moyenne aux extrémités} \times \text{nombre de termes} \quad (0 \leq m \leq n).$$

7.2.2 Suites géométriques

Dans cette section, q désigne un nombre de \mathbb{R} .

suite géométrique

Définition 7.12 u géométrique de raison $q \iff u_{n+1} = qu_n \quad (n \geq 0)$

– Une suite est dite géométrique lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant en le multipliant par la même constante

$$u \text{ suite géométrique} \iff (\exists q \in \mathbb{R} : u \text{ suite géométrique de raison } q).$$

- Si $q = 0$, les solutions de (7.1) sont nulles à partir du rang 1
- Si $q = 1$, les solutions de (7.1) sont constantes

expression

Propriété 7.13 u géométrique de raison $q \iff u_n = u_0 q^n \quad (n \geq 0)$

- u converge vers 0 si $|q| < 1$.
- u est constante si $q = 1$.
- u diverge lorsque $|q| \geq 1$ et $q \neq 1$.

somme

La somme des termes d'une suite géométrique est égale au quotient du terme qui suivrait le dernier moins le premier terme par la raison moins 1. la moyenne des termes aux extrémités

Propriété 7.14 Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors,

$$\sum_{m \leq k \leq n} u_k = \frac{u_m - q \times u_n}{1 - q} = \frac{\text{premier terme} - \text{terme après le dernier}}{1 - \text{raison}} \quad (0 \leq m \leq n).$$

7.2.3 Suites arithmético-géométriques

Dans cette section, a et b désignent deux nombres de \mathbb{R} et nous considérons les équations du type

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (n \geq 0) \tag{7.1}$$

suite arithmético-géométrique

Définition 7.15 u arithmético-géométrique $\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant (7.1)

- Si $a = 0$, les solutions de (7.1) sont constantes à partir du rang 1
- Si $a = 1$, les solutions de (7.1) sont arithmétiques, de raison b
- Si $b = 0$, les solutions de (7.1) sont géométriques, de raison a

formule

Propriété 7.16 Soient $a \neq 1$ et $c = \frac{b}{1-a}$. Alors,

$$u \text{ vérifie (7.1)} \iff u_n = c + a^n(u_0 - c) \quad (n \geq 0).$$

Méthode 7.17 (présentation recommandée)

1. Chercher la suite constante c vérifiant (7.1) en résolvant l'équation $x = ax + b$
2. Soustraire et remarquer que la suite $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a
3. En déduire la formule de u_n .

7.2.4 Suites vérifiant une récurrence linéaire du second ordre

Dans cette section, nous considérons pour $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$ les équations du type

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad (n \geq 0). \quad (7.2)$$

récurrence li-
aire homogène
second ordre

Définition 7.18 Une suite u satisfait une récurrence linéaire homogène du second ordre *ssi* il existe des nombres réels $a \neq 0$, b et $c \neq 0$ vérifiant (7.2).

- Une telle suite est complètement déterminée par la donnée de ses 2 premiers termes u_0 et u_1
- Si $a = b = c = 0$, toutes les suites sont solutions de l'équation (7.2), qui n'a aucun intérêt
- Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ avec $a = 0$ ou $c = 0$, les solutions de (7.2) sont arithmético-géométriques

polynôme ca-
ractéristique

Définition 7.19 Le polynôme caractéristique associé à (7.2) est le trinôme

$$P = aX^2 + bX + c \quad (7.3)$$

équation ca-
ractéristique

Définition 7.20 L'équation caractéristique associée à (7.2) est l'équation $aX^2 + bX + c = 0$

solutions

Propriété 7.21 Si le polynôme caractéristique (7.3) admet une racine double s , une suite réelle u est solution de (7.2) *ssi* il existe des nombres réels λ et μ tels que

$$u_n = \lambda s^n + \mu n z^n \quad (n \geq 0)$$

Propriété 7.22 Si le polynôme caractéristique (7.3) admet deux racines distinctes s et z , une suite réelle u est solution de (7.2) ssi il existe des nombres λ et μ tels que

$$u_n = \lambda s^n + \mu z^n \quad (n \geq 0)$$

- Dans le cas où les racines de P sont réelles, les constantes λ et μ sont réelles.
- Lorsque les racines de P ne sont pas réelles, elles sont conjuguées. En posant $s = re^{i\vartheta}$ et $z = re^{-i\vartheta}$, on peut alors trouver deux constantes réelles α et β telles que

$$u_n = \alpha r^n \cos(n\vartheta) + \beta r^n \sin(n\vartheta) \quad (n \geq 0)$$

7.3 Suites bornées, minorées, majorées

suites bornées

Dans cette section, u désigne une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite est bornée ssi ses éléments appartiennent tous à un même disque.

Définition 7.23 u est bornée ssi il existe M tel que $|u_n| \leq M$ pour $n \geq 0$

Définition 7.24 u est bornée à partir du rang N ssi il existe M tel que $|u_n| \leq M$ pour $n \geq N$

alage d'indice

Le fait qu'une suite soit bornée ne dépend pas de ses premiers éléments, mais dépend de ses éléments u_n pour les grandes valeurs de n .

Propriété 7.25 Une suite est bornée ssi elle est bornée à partir d'un certain rang

espace des suites bornées

La somme, la multiplication par une constante et le produit de suites bornées est une suite bornée

Propriété 7.26 Les sommes, les multiples et les produits de suites bornées sont des suites bornées.

suite minorée suite majorée

Définition 7.27 u est majorée ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour $n \geq 0$

Définition 7.28 u est minorée ssi il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n$ pour $n \geq 0$

- Parler de suites minorées ou majorées n'a de sens que pour les suites réelles car il n'y a pas d'ordre dans \mathbb{C} (écrire $i \leq 1$ n'a pas de sens).
- u est minorée ssi l'ensemble $\{|u_n| : n \in \mathbb{N}\}$ admet un minorant
- u est majorée ssi l'ensemble $\{|u_n| : n \in \mathbb{N}\}$ admet un majorant

suites réelles
bornées

Propriété 7.29 u est bornée *ssi* u est minorée et majorée

alage d'indice

– Le fait qu'une suite soit minorée ou majorée ne dépend pas de ses premiers éléments, mais dépend de ses éléments u_n pour les grandes valeurs de n .

ordre des suites

Notation 7.30 $u \leq v \iff u_n \leq v_n$ pour $n \geq 0$

– Cette relation entre suites définit un ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Elle est réflexive, transitive et anti-symétrique :

$$\begin{array}{llll} u \leq u & (u \in \mathbb{R}^I) & & \text{réflexive} \\ (u \leq v \text{ et } v \leq w) \implies (u \leq w) & (u, v, w \in \mathbb{R}^I) & & \text{transitive} \\ (u \leq v \text{ et } v \leq u) \implies (u = v) & (u, v \in \mathbb{R}^I) & & \text{anti-symétrique} \end{array}$$

– Cet ordre des suites réelles va permettre d'écrire simplement certaines propriétés fondamentales du calcul de limite (théorème des gendarmes,...).

7.4 Suites convergentes

Dans cette section, u et v désignent des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et ℓ désigne un nombre de \mathbb{R} .

notation

Définition 7.31 u tend vers ℓ *ssi* u converge vers ℓ $\iff \lim(u) = \ell \iff u \rightarrow \ell$
non standard

limite

Définition 7.32 $u \rightarrow \ell$ *ssi* tout intervalle ouvert contenant ℓ contient u_n pour tous les indices n , sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Définition 7.33 $u \rightarrow \ell \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$

unicité

Propriété 7.34 Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique

– Lorsqu'elle existe, la limite ℓ de la suite u est notée $\ell = \lim u$ ou $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

suite convergente

Définition 7.35 u converge *ssi* il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que u converge vers ℓ

– On dit qu'une suite converge ou qu'elle est convergente.

suite divergente

Définition 7.36 u diverge *ssi* u ne converge pas

– Lorsque la suite u ne converge pas, on dit qu'elle diverge, qu'elle est divergente.

u diverge $\iff \forall \ell \in \mathbb{R} : u$ ne converge pas vers ℓ .

- Une suite peut diverger pour diverses raisons :
- Elle n'est pas bornée. Exemple : $u_n = n$.
- Elle oscille entre plusieurs valeurs. Exemple : $u_n = (-1)^n$
- Elle prend des valeurs ératiques dans un disque

**condition
nécessaire**

Propriété 7.37 u converge $\implies u$ bornée

limite nulle

Une suite u converge vers ℓ ssi la suite $u - \ell$ converge vers 0.

Propriété 7.38 $u \rightarrow \ell \iff u - \ell \rightarrow 0$

- Il est plus facile de montrer que la suite $u - \ell$ converge vers 0 que de montrer que la suite u converge vers ℓ .

**principe des
gendarmes**

Une suite réelle inférieure en valeur absolue à une suite de limite nulle converge vers 0.

Propriété 7.39 $\left. \begin{array}{l} |u| \leq v \\ v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \implies u \rightarrow 0$

**Addition
Produit**

Théorème 7.40 Soient u et v des suites convergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les suites λu , $u + v$ et $u \times v$ convergent et

$$\begin{aligned} \lim(\lambda.u) &= \lambda.\lim(u) \\ \lim(u + v) &= \lim(u) + \lim(v) \\ \lim(u \times v) &= \lim(u) \times \lim(v) \end{aligned}$$

limite non nulle

Une suite de limite non nulle ne s'annule plus à partir d'un certain rang.

Propriété 7.41 $u \rightarrow \ell \neq 0 \implies (\exists N \geq 0 : \forall n \geq N, u_n \neq 0)$

- On peut obtenir une propriété plus forte. Si $u \rightarrow \ell \neq 0$, on a en fait

$$\exists N \geq 0 : \forall n \geq N, |u_n| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$$

quotient

Si $v \rightarrow \ell \neq 0$, alors la suite $u/v := (u_n/v_n)_{n \geq N}$ est définie à partir d'un certain rang.

Théorème 7.42 Soient $u \rightarrow \ell$ et $v \rightarrow \ell' \neq 0$. Alors, $\lim \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\lim u}{\lim v} = \frac{\ell}{\ell'}$

**Cv+Cv=Cv
Cv+Dv=Dv
Dv+Dv=?**

Propriété 7.43 $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ converge} \\ v \text{ diverge} \end{array} \right\} \implies u + v \text{ diverge}$

- Si u et v sont deux suites divergentes, la suite $u + v$ peut converger ou diverger :
- La somme de $(n)_{n \geq 0}$ et $(-n)_{n \geq 0}$ est la suite nulle, qui converge.
- La somme de $(n)_{n \geq 0}$ et $(n)_{n \geq 0}$ diverge.

bre des suites
convergentes

La somme, la multiplication par une constante et le produit de suites convergentes est une suite convergente

Propriété 7.44 Les sommes, les multiples, les produits de suites convergentes sont convergentes

Dans cette section u, v et w désignent des suites réelles et ℓ et ℓ' des nombres réels.

limite par va-
leur inférieures
supérieures

Notation 7.45 $u \rightarrow \ell^- \iff (u \rightarrow \ell \text{ et } u_n < \ell \text{ quand } n \rightarrow \infty)$
 $u \rightarrow \ell^+ \iff (u \rightarrow \ell \text{ et } u_n > \ell \text{ quand } n \rightarrow \infty)$

égaliés larges

Les inégalités larges sont conservées par passage à la limite.

Propriété 7.46 Soient $u \rightarrow \ell$ et $v \rightarrow \ell'$. Alors, $u \leq v \implies \lim u \leq \lim v$.

- Les inégalités strictes ne sont en général pas conservées.

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{n} > 0 \text{ mais } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

- Utilisez les inégalités larges de préférence aux inégalités strictes.

principe des
gendarmes
réels

une suite encadrée par deux suites, de même limite ℓ , converge également vers ℓ .

Propriété 7.47 Soient $u \rightarrow \ell$ et $w \rightarrow \ell$. Alors, $u \leq v \leq w \implies v \rightarrow \ell$

Chaque nombre réel peut être obtenu comme la limite d'une suite de nombres rationnels.

7.5 Suites divergeant vers l'infini

Dans cette section, u et v désignent des suites réelles.

Définition 7.48 Une suite diverge vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert d'extrémité $-\infty$ contient les u_n pour tous les indices n , sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Définition 7.49 $u \rightarrow -\infty \iff (\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \leq m)$

- Lorsque u tend vers $+\infty$ (on dit également que u diverge vers $+\infty$), on note $\lim u = +\infty$.

divergence
vers $+\infty$

Définition 7.50 Une suite diverge vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert d'extrémité $+\infty$ contient les u_n pour tous les indices n , sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Définition 7.51 $u \rightarrow +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \geq M)$

– Lorsque u tend vers $+\infty$ (on dit également que u diverge vers $+\infty$), on note $\lim u = +\infty$.

addition

Propriété 7.52 $\left. \begin{array}{l} u \rightarrow +\infty \\ v \text{ minorée} \end{array} \right\} \implies u + v \rightarrow +\infty$

– Une suite convergente ou qui diverge vers $+\infty$ est minorée

multiple

Propriété 7.53 $u \rightarrow +\infty \implies \begin{cases} -\lambda u \rightarrow -\infty & (\lambda > 0) \\ \lambda u \rightarrow +\infty & (\lambda > 0) \end{cases}$

produit

Le produit d'une suite divergent vers $+\infty$ et d'une suite minorée par une constante strictement positive diverge vers $+\infty$.

Propriété 7.54 $\left. \begin{array}{l} u \rightarrow +\infty \\ v \text{ minorée par } m > 0 \end{array} \right\} \implies uv \rightarrow +\infty$

inverse

Propriété 7.55 $u \rightarrow +\infty \iff \frac{1}{u} \rightarrow 0^+$

Propriété 7.56 $u \rightarrow -\infty \iff \frac{1}{u} \rightarrow 0^-$

– Pour que la suite de droite ait un sens, il faut évidemment que u ne s'annule pas à partir d'un certain rang

principe des gendarmes

Propriété 7.57 $\left. \begin{array}{l} u \leq v \\ u \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \implies v \rightarrow +\infty$

7.6 Suites monotones

Dans cette section, u et v désignent des suites réelles.

croissantes
décroissantes

Définition 7.58 u est $\left\{ \begin{array}{l} \text{croissante} \\ \text{strictement croissante} \\ \text{décroissante} \\ \text{strictement décroissante} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \geq u_n \\ u_{n+1} > u_n \\ u_{n+1} \leq u_n \\ u_{n+1} < u_n \end{array} \right. \quad (n \geq 0)$

0)

monotonie

Définition 7.59 u est strictement monotone (resp. monotone) ssi u est strictement décroissante ou strictement croissante (resp. décroissante ou croissante).

– Pour étudier la monotonie d'une suite u , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

Méthode 7.60 (étude de monotonie d'une suite)

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ (recommandé)
- Lorsque $u_n > 0$, étudier le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (seulement si simplification, produits, puissances ou factorielles)
- Introduire une fonction f vérifiant $f(n) = u_n$ et dresser son tableau de variation

limite
monotonie

Une suite croissante (resp. décroissante) converge ssi elle est majorée (resp. minorée).

Théorème 7.61 Une suite croissante u converge ssi u est majorée. Dans tous les cas, $\lim u = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$

Théorème 7.62 Une suite décroissante u converge ssi u est minorée. Dans tous les cas, $\lim u = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

– Une suite croissante qui n'est pas majorée diverge vers $+\infty$ et une suite décroissante qui n'est pas minorée diverge vers $-\infty$

tes adjacentes

Deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0

Définition 7.63 u et v sont adjacentes $\iff \begin{cases} u \text{ croissante} \\ v \text{ décroissante} \\ v - u \rightarrow 0 \end{cases}$

théorème

Prouver que deux suites sont adjacentes permet de prouver qu'elles convergent, vers la même limite qui plus est.

Théorème 7.64 Deux suites adjacentes convergent vers la même limite finie

7.7 Suites négligeables

Séquence 22

programme

- Suites négligeables. Notation $u_n = o(v_n)$.
- Croissances comparées

Dans cette section u, v, w, U et V désignent des suites de nombres de \mathbb{R} .

te négligeable Une suite est négligeable devant une autre suite lorsqu'elle est égale au produit de cette suite par une suite de limite nulle.

Définition 7.65 $u = o(v)$
 u négligeable devant v $\left| \begin{array}{l} \iff \underbrace{u \prec v}_{\text{non standard}} \iff u = v \times \alpha \text{ avec } \alpha \rightarrow 0. \end{array} \right.$

– Lorsque v ne s'annule pas, cela revient à dire que u/v tends vers 0.

transitivité Si u est négligeable devant v qui est négligeable w , alors u est négligeable devant w .

Propriété 7.66 $u \prec v \prec w \implies u \prec w$

**somme
produit
puissance
multiple
quotient** Les relations suivantes permettent de simplifier des relations faisant intervenir sommes, produit, puissances et quotients.

Propriété 7.67 $\left. \begin{array}{l} u \prec w \\ v \prec w \end{array} \right\} \implies u + v \prec w$

Propriété 7.68 $\left. \begin{array}{l} u \prec U \\ v \prec V \end{array} \right\} \implies uv \prec UV$

Propriété 7.69 $u \prec v \implies u^k \prec v^k \quad (k \geq 1)$

Propriété 7.70 $u \prec v \iff \lambda u \prec \mu v \quad (\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$

Propriété 7.71 Soient u et v suites ne s'annulant pas. Alors $u \prec v \iff \frac{1}{v} \prec \frac{1}{u}$

7.8 Suites équivalentes

Séquence 22

programme

- Suites équivalentes. Notation $u_n \sim v_n$.
- $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$
- Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.

Dans cette section u, v, w, U et V désignent des suites de nombres de \mathbb{R} .

suites équivalentes

Une suite est équivalente à une autre suite lorsqu'elle est égale au produit de cette suite par une suite de limite 1.

Définition 7.72 $u \sim v$ $\left| \begin{array}{l} u \text{ équivalente à } v \\ \alpha \text{ avec } \alpha \rightarrow 1 \end{array} \right. \iff u = v + o(v) \iff u = v \times$

- Lorsque v ne s'annule pas, cela revient à dire que u/v tends vers 1.
- La relation précédente peut également s'écrire

$$u \sim v \iff u = v + o(v)$$

- Cette relation est reflexive et symétrique : pour $u, v \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{array}{l} u \sim v \iff v \sim u \quad (\text{symétrie}) \\ u \sim u \quad (\text{reflexivité}) \end{array}$$

transitivité Si u est équivalente à v qui est équivalente à w , alors u est équivalente à w .

Propriété 7.73 $u \sim v \sim w \implies u \sim w$

signe Deux suites réelles équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang

Propriété 7.74 Deux suites réelles équivalentes ont le même signe à partir d'un certain rang

- La fonction signe dont il est question dans cette propriété est définie par

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} \text{positif} & (x > 0) \\ \text{nul} & \text{si } (x=0) \\ \text{négatif} & (x < 0) \end{cases}$$

**produit
puissance
quotient**

Les relations suivantes permettent de simplifier des relations d'équivalence faisant intervenir produits, puissances et quotients.

Propriété 7.75 $\left. \begin{array}{l} u \sim U \\ v \sim V \end{array} \right\} \implies uv \sim UV$

Propriété 7.76 $u \sim v \implies u^k \sim v^k \quad (k \geq 1)$

Propriété 7.77 Soient u et v deux suites ne s'annulant pas. Alors, $u \sim v \iff \frac{1}{v} \sim \frac{1}{u}$

Attention : on n'a pas le droit d'ajouter des équivalents en général, c'est illégal. Pour

$$u_n := 1, \quad U_n := 1, \quad v_n := -1 \quad \text{et} \quad V_n := -1 + \frac{1}{n},$$

par exemple, on a $u_n \sim U_n$, on a $v_n \sim V_n$ et pourtant on a $u_n + v_n = 0 \approx \frac{1}{n} = U_n + V_n$.

limite

Propriété 7.78 $u \rightarrow \ell \iff u \sim \ell, \quad (\ell \neq 0)$

Propriété 7.79 $u \rightarrow 0 \iff u = o(1)$

comparaison
suites de
références

A l'infini, le logarithme croît moins vite qu'un monôme, un monôme croît moins vite qu'une exponentielle et une exponentielle croît moins vite que la factorielle

Théorème 7.80 $\ln(n) \prec n^\alpha \prec e^{\beta n} \prec n! \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$

8 Séries

Séquence 23

Dans cette section, S désigne la suite des sommes partielles d'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad (n \geq 0)$$

Remarque : une suite v peut être considérée comme une série de terme général u défini par

$$u_0 = v_0 \text{ et } u_k = v_k - v_{k-1} \quad (k \geq 1)$$

8.1 Généralités

programme

- Série de terme général u_n . On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n) .
- Sommes partielles associées
- Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente.
- Combinaison linéaire de séries convergentes.
- Définition de la convergence absolue.
- La convergence absolue implique la convergence. On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes. *Résultat admis.*
- Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.

Convergence

Définition 8.1 S converge $\iff \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge

Si S converge, on dit que la série de terme général u converge ou qu'elle est de nature convergente.

Si S diverge, on dit que la série de terme général u diverge ou qu'elle est de nature divergente.

Somme de la série

Définition 8.2 En cas de convergence de la suite S des sommes partielles, sa limite ℓ est appelée somme de la série et est notée

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \ell = \lim S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

ite des restes

Définition 8.3 La suite R des reste d'une série **convergente** de terme général u est définie par

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad (n \geq 0)$$

Propriété 8.4 Si la série de terme général u converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n$ pour $n \geq 0$

Condition né-
cessaire de
convergence

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série convergente, alors u converge vers 0.

Propriété 8.5 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge $\implies u \rightarrow 0$

Lorsque la suite u ne converge pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement

Relation
de Chasles

Propriété 8.6 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge $\iff \sum_{k=m}^{\infty} u_k$ converge $(m \in \mathbb{N})$

Et en cas de convergence, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{m-1} u_k + \sum_{k=m}^{\infty} u_k \quad (m \in \mathbb{N})$$

– La convergence d'une série ne dépend que de ce qui se passe au voisinage de l'infini.

Linéarité

Propriété 8.7 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et u et v les termes généraux de deux séries convergentes, alors la série de terme général $\lambda u + \mu v$ converge et

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Addition

Propriété 8.8 Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge
Si $\sum u_n$ converge et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Conver-
gence absolue

Définition 8.9 On dit qu'une série de terme général u converge absolument si et seulement si la série de terme général $|u|$ converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ converge absolument} \iff \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \text{ converge}$$

Convergence
simple et absolue

Propriété 8.10 Si la série $\sum u_k$ converge absolument, alors la série $\sum u_k$ converge et de plus

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$

8.2 Séries à termes positifs

programme

- Convergence des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leq v_n$ et $u_n \sim v_n$.
- Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.

Dans cette section u est à terme positifs ou nuls (mais les énoncés sont aussi valables pour les suites négatives ou nulles quitte à tout multiplier par -1) En pratique, il faut que u reste de signe constant à partir d'un certain rang.

équivalent

Propriété 8.11 Soient u et v deux suites à termes positifs ou nuls. Si $u \sim v$, alors les séries de termes généraux u et v ont la même nature *Plus généralement, on a*

$$\left. \begin{array}{l} u \sim v \\ u_n \text{ de signe constant pour } n \geq N \end{array} \right\} \implies \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ a même nature que } \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

inégalité

Propriété 8.12 Soient u et v deux suites telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq 0$.

- Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge
- Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge et on a $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

petit o

Propriété 8.13 Soient u et v deux suites à termes positifs ou nuls telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge
- Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge.

8.3 Séries de référence

programme

- Convergence des séries de Riemann.
- Convergence et formules de sommation des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.
- Série exponentielle. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. *Ce résultat pourra être démontré à l'aide de la formule de Taylor.*

Dans toute cete section, α et x désignent des nombres réels

Série de
Riemann

Propriété 8.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

Série géomé-
ue et dérivées

Propriété 8.15 $\sum x^n, \sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$ convergent ssi $-1 < x < 1$.

Propriété 8.16 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$

Propriété 8.17 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$

Propriété 8.18 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$

Exponentielle

Propriété 8.19 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$

9 Fonctions réelles (comportement local)

programme En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de \mathbb{R} .

Les étudiants doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement. L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration (du cours) n'est exigible des étudiants.

9.1 Limites

Séquence 6

9.1.1 Limites finies

programme

- Définition de la limite d'une fonction d'une variable en un point. *On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I , x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I et ℓ un élément de \mathbb{R} , on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.*
- Unicité de la limite.

Dans cette section, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels, f , g et h désignent des fonctions réelles définies sur un intervalle I et a désigne un élément ou une extrémité finie de I . Pour simplifier, on note

$$\underbrace{f \xrightarrow{a} \ell}_{\text{non standard}} \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ tends vers } \ell \text{ en } a \\ f \text{ converge vers } \ell \text{ en } a \\ f \text{ admet } \ell \text{ comme limite en } a \end{array} \right.$$

limite

Définition 9.1 f admet ℓ pour limite en a ssi pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$$f \xrightarrow{a} \ell \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

unicité de la limite

Propriété 9.2 La limite d'une fonction en un point est unique, lorsqu'elle existe.

9.1.2 Généralisation du concept de limite

programme

- Limites à droite et à gauche.
- Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.
- Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.

Il est possible de généraliser la notion de limite en faisant tendre x vers $-\infty$, a par la gauche, a , a par la droite, $+\infty$ et avec $f(x)$ qui tends de même vers $-\infty$, vers ℓ par la gauche, vers ℓ par la droite, vers $+\infty$. De sorte qu'il existe 25 situations mathématiques différentes.

Il existe un formalisme qui permet d'unifier les 25 différents aspects des limites :
 Pour tout voisinage V de la limite ℓ , il existe un voisinage U du point a tel que

$$\underbrace{x \in U}_{\text{quand } x \text{ est proche de } a} \implies \underbrace{f(x) \in V}_{f(x) \text{ est proche de } \ell}$$

mais il n'est pas au programme et nous ne l'utilisons ici que pour illustrer et comprendre les concepts de limite, dont nous ne présenteront que quelques variantes

limite à gauche
à droite

Définition 9.3 f admet ℓ pour limite à gauche en a ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [a - \alpha, a[$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \\ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell \\ f(a^-) = \ell \end{array} \right| \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [a - \alpha, a[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Définition 9.4 f admet ℓ pour limite à droite en a ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap]a, a + \alpha]$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \\ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell \\ f(a^+) = \ell \end{array} \right| \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap]a, a + \alpha], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

limites en $\pm\infty$

Définition 9.5 f tends vers ℓ en $+\infty$ ssi pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout élément x de $I \cap [M, +\infty[$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$$f \xrightarrow{+\infty} \ell \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I \cap [M, +\infty[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Définition 9.6 f tend vers ℓ en $-\infty$ ssi pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout élément x de $I \cap]-\infty, m]$, on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$$f \xrightarrow{-\infty} \ell \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in I \cap]-\infty, m], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

limites infinies

Définition 9.7 f diverge vers $+\infty$ en a ssi pour tout nombre $M \in \mathbb{R}$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, on a $f(x) \geq M$

$$f \xrightarrow{a} +\infty \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], f(x) \geq M)$$

Définition 9.8 f diverge vers $-\infty$ en a ssi pour tout nombre $m \in \mathbb{R}$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, on a $f(x) \leq m$

$$f \xrightarrow{a} -\infty \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff (\forall m \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], f(x) \leq m)$$

limites par valeurs supérieures ou inférieures

f tend vers ℓ par valeurs supérieures en a ssi f tend vers ℓ , en restant strictement supérieur à ℓ , lorsque x tend vers en a

$$\text{Notation 9.9} \quad f \xrightarrow{a} \ell^+ \iff f \xrightarrow{a} \ell \text{ avec } f(x) > \ell \quad (x \rightarrow a)$$

f tend vers ℓ par valeurs inférieures en a ssi f tend vers ℓ , en restant strictement inférieur à ℓ , lorsque x tend vers en a

$$\text{Notation 9.10} \quad f \xrightarrow{a} \ell^- \iff f \xrightarrow{a} \ell \text{ avec } f(x) < \ell \quad (x \rightarrow a)$$

9.1.3 Opérations

programme

- Opérations algébriques sur les limites.
- Compatibilité avec la relation d'ordre.
- Existence d'une limite par encadrement.
- Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0 , alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ .
- Limite d'une fonction composée.

Dans cette section, nous considérons principalement les opérations concernant les limites finies en un point réel. Au besoin, on utilisera le bon sens pour déterminer

les opérations correspondantes pour les autres variantes de limite, car il n'est pas question de les expliciter toutes.

valeur absolue

Propriété 9.11 $f \xrightarrow{a} \ell \implies |f| \xrightarrow{a} |\ell|$

Addition
Produit

Théorème 9.12 $\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} \ell \\ g \xrightarrow{a} \ell' \end{array} \right\} \implies f + g \xrightarrow{a} \ell + \ell'$

Théorème 9.13 $\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} \ell \\ g \xrightarrow{a} \ell' \end{array} \right\} \implies f \times g \xrightarrow{a} \ell \times \ell'$

– Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} \lim_a(\lambda \cdot f) &= \lambda \cdot \lim_a(f), \\ \lim_a(f + g) &= \lim_a(f) + \lim_a(g), \\ \lim_a(f \times g) &= \lim_a(f) \times \lim_a(g). \end{aligned}$$

– Cette propriété est également valable pour des limites infinies, qui ne donnent pas d'indetermination (essentiellement $-\infty + \infty$ et $0 \times \infty$)

limite non nulle

Une fonction de limite non nulle en a ne s'annule pas autour de a .

Propriété 9.14 $f \xrightarrow{a} \ell \neq 0 \implies (\exists \alpha > 0 : \forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[, f(x) \neq 0)$

quotient

Si $\lim_a g(x) \neq 0$, alors la fonction f/g est définie autour de a .

Théorème 9.15 $\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} \ell \\ g \xrightarrow{a} \ell' \end{array} \right\} \implies \frac{f}{g} \xrightarrow{a} \frac{\ell}{\ell'} \quad (\ell' \neq 0)$

– Autrement dit, on a

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a(f)}{\lim_a(g)}$$

– Cette propriété est également valable pour des limites infinies, qui ne donnent pas d'indetermination (essentiellement $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$)

composition

Théorème 9.16 Soient I et J des intervalles, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ des applications, ℓ et b des nombres réels et a un élément ou une extrémité de I . Alors,

$$\left. \begin{array}{l} f(I) \subset J \\ f \xrightarrow{a} b \\ g \xrightarrow{b} \ell \end{array} \right\} \implies g \circ f \xrightarrow{a} \ell$$

suite

Théorème 9.17 Soient $\ell \in \mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité d'un intervalle I , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et u une suite à valeurs dans I . Alors,

$$\left. \begin{array}{l} u \rightarrow a \\ f \xrightarrow{a} \ell \end{array} \right\} \implies f(u_n) \rightarrow \ell$$

égalité larges Les inégalités larges sont conservées par passage à la limite.

Propriété 9.18 Soient f et g deux fonctions réelles convergentes en a . Alors,
 $f \leq g \implies \lim_a f \leq \lim_a g$

- Les inégalités strictes ne sont en général pas conservées.
- Utilisez les inégalités larges de préférence aux inégalités strictes.

principe des gendarmes

Propriété 9.19 $\left. \begin{array}{l} f \leq g \leq h \\ f \xrightarrow{a} \ell \\ h \xrightarrow{a} \ell \end{array} \right\} \implies g \xrightarrow{a} \ell$

principe des gendarmes

Une fonction inférieure en valeur absolue à une fonction de limite nulle en a converge vers 0 en a .

Corollaire 9.20 $\left. \begin{array}{l} |f| \leq g \\ g \xrightarrow{a} 0 \end{array} \right\} \implies f \xrightarrow{a} 0$

9.1.4 Généralisations et opérations

De même qu'il existe de multiples situations applicables au concept de limite, il existe une multitude d'opérations possibles entre limites. Le but de cette section est de permettre de distinguer les opérations possibles des autres via le concept de forme indéterminée.

Pour simplifier les notations, nous utiliserons la notation symbolique et pratique suivante (*à utiliser au brouillon seulement, car ne faisant pas partie officiellement du cours*)

$$\ell + \infty = +\infty$$

qui résume le théorème suivant $\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} \ell \\ g \xrightarrow{a} +\infty \end{array} \right\} \implies f + g \xrightarrow{a} +\infty$.

- **Opérations légales.** Les opérations de la section précédente restent valides lorsque x tends vers un point du type $-\infty$, a^- , a , a^+ , $+\infty$.

Par contre, lorsque les limites sont du type $-\infty$, l^- , l^+ ou $+\infty$, cela peut être différent.

Quelques opérations valides (utilisant la notation précédente et parfois ∞ à la place de $+\infty$) :

$$\begin{array}{ll} \infty + \infty = +\infty & l + \infty = +\infty \quad (l \in \mathbb{R}) \\ \infty \times \infty = +\infty & l \times \infty = +\infty \quad (l > 0) \\ -\infty \times \infty = -\infty & -\infty \times (-\infty) = +\infty \\ \frac{1}{+\infty} = 0^+ & \frac{1}{0^+} = +\infty \\ l' + l^+ = (l' + l)^+ & -(l^-) = (-l)^+ \quad (l \in \mathbb{R}, l' \in \mathbb{R}) \end{array}$$

- **Formes indéterminées.** Les formes indéterminées les plus fréquentes sont

$$-\infty + \infty, \quad 0 \times \infty, \quad 1^\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \text{etc.}$$

En général, on utilise le bon sens pour déterminer si une opération est légale ou pas, les formes indéterminées apparaissant dès qu'il y a un conflit entre deux limites (l'une allant dans un sens contrecarré par l'autre)

principe des
gendarmes

Propriété 9.21 $\left. \begin{array}{l} f \leq g \\ f \xrightarrow{a} +\infty \end{array} \right\} \implies g \xrightarrow{a} +\infty$

9.2 Continuité en un point

Séquence 6

programme

- Définition de la continuité d'une fonction d'une variable en un point.
On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I , x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I et ℓ un élément de \mathbb{R} , on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$; ainsi, lorsque x_0 appartient à I , f est continue en x_0 , sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0 .
- Opérations algébriques
- Prolongement par continuité en un point.

Dans toute cette section, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une application définie sur un intervalle I contenant a

9.2.1 Généralités

continuité
à gauche
à droite

Définition 9.22 f continue en $a \iff f \xrightarrow{a} f(a)$

– La continuité de f en a est une notion locale. Elle ne dépend que de ce qui se passe pour f lorsque x est très proche de a .

– f est continue à gauche en a ssi $f(a^-) = f(a)$

– f est continue à droite en a ssi $f(a) = f(a^+)$

– f est continue en a ssi $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$

Définition 9.23 f continue à gauche en $a \iff f \xrightarrow{a^-} f(a) \iff f(a^-) = f(a)$

Définition 9.24 f continue à droite en $a \iff f \xrightarrow{a^+} f(a) \iff f(a^+) = f(a)$

– La continuité de f à gauche (resp. à droite) en a n'a de sens que si f est définie sur un intervalle du type $]b, a]$ (resp. $[a, b[$).

lien

Propriété 9.25 f continue en $a \iff f(a^-) = f(a) = f(a^+) \iff \begin{cases} f \text{ continue à gauche en } a \\ f \text{ continue à droite en } a \end{cases}$

prolongement
par continuité

Théorème 9.26 Soient I un intervalle contenant a et une application $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f \xrightarrow{a} \ell \in \mathbb{R}$. Alors, l'application \tilde{f} définie sur I par

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \text{ est continue en } a$$

– Cette application \tilde{f} est égale à f en tout point de I sauf en a , où elle est continue et f n'est pas définie. C'est la raison pour laquelle on l'appelle « prolongement par continuité de f en a » et, très souvent on la note simplement f au lieu de \tilde{f} (*léger abus de notation, consistant à remplacer f par \tilde{f}*)

9.2.2 Opérations

addition
multiple
produit

La somme, les multiples et le produit de fonctions continues est continue.

Propriété 9.27 Soient f et g des fonctions continues en a . Alors, les fonctions $f + g$, $f \times g$ et λf sont continues en a pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

– En particulier, une combinaison linéaire de fonctions continues en a est continue en a .

quotient Le quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas en a , de deux fonctions continues en a est continue en a .

Propriété 9.28 Soient f et g des fonctions continues en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors, la fonction $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et continue en a .

composée Lorsque cela a un sens, la composée d'une fonction f continue en a et d'une fonction continue en $f(a)$ est continue en a .

Théorème 9.29 Soient deux applications $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a \in I$. Alors,

$$\left. \begin{array}{l} f(I) \subset J \\ f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{array} \right\} \implies g \circ f \text{ continue en } a$$

9.3 Dérivée en un point

Séquence 12

programme

- Dérivées à gauche et à droite.
- Dérivée en un point. *Interprétation graphique.*
- Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, dérivée d'une composée. Exemples.
- Dérivée d'un polynôme.
- Dérivation des fonctions réciproques.

9.3.1 Généralités

Dans cette section, f désigne une fonction à valeurs dans \mathbb{R} définie sur un intervalle contenant au moins 2 points, dont a . Pour la dérivée à gauche (resp. à droite), I doit contenir un point à gauche (resp. à droite) de a .

nombre dérivée Le nombre dérivée de f en a est la limite de son taux d'accroissement en a .

Définition 9.30 $f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Propriété 9.31 Le nombre dérivé en a est unique lorsqu'il existe.

Définition 9.32 f est dérivable en a ssi f admet un nombre dérivé en a

– Le nombre dérivée est la limite des taux d'accroissements en a et on utilise aussi le changement de variable $x = a + h$ pour écrire que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

La propriété suivante permet de transformer un renseignement de dérivabilité en approximation utile pour déterminer des limites non-triviales

Propriété 9.33 Si f est dérivable en a , il existe une fonction $\alpha \rightarrow a0$ telle que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\alpha(x) \quad (x \in I)$$

– Une réciproque de cette propriété sera énoncée et établie dans la section sur les développements limités

dérivée
à gauche
à droite

Définition 9.34 $f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Définition 9.35 $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Propriété 9.36 Lorsqu'elles existent, les dérivées à droite et à gauche en a sont uniques

Propriété 9.37 Soit I un intervalle contenant un point à gauche et à droite de a . Alors, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a ssi f admet des dérivées à gauche et à droite égales en a . De plus, dans ce cas

$$f'_g(a) = f'(a) = f'_d(a)$$

condition
nécessaire

Propriété 9.38 f dérivable en $a \implies f$ continue en a

– La continuité en a est une condition nécessaire pour que f soit dérivable en a .

9.3.2 Opérations

Dans cette section f , g et h désignent des fonctions dérivables en a , à valeurs dans \mathbb{R} , définies sur un intervalle I contenant au moins 2 points, dont a .

somme
multiple
produit

Propriété 9.39 $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Propriété 9.40 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ est dérivable en a et $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$

Propriété 9.41 $f \times g$ est dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$

– Les fonctions polynômes $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ sont dérivables sur \mathbb{R} .

quotient

Propriété 9.42 Soient f et g des fonctions dérivables en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2}$$

– Une fonction g dérivable en a est continue en a . Si de plus $g(a) \neq 0$, la fonction g ne s'annule pas autour de a , le quotient $1/g$ est définie autour de a , dérivable en a et satisfait

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

En particulier, on peut dériver le quotient $f/g = f \times \frac{1}{g}$ en écrivant

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) \times \frac{1}{g(a)} + f(a) \times \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

– Les fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont dérivables sur \mathbb{R} privé des points annulant leur dénominateur.

composée

Théorème 9.43 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a , avec $f(I) \subset J$, et soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$. alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

bijection réciproque

Théorème 9.44 Soit f une bijection dérivable en a , avec $f'(a) \neq 0$. Alors, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

étude des réciproques

Lorsque l'on connaît bien les propriétés d'une bijection f , il est généralement possible d'en déduire des propriétés pour sa bijection réciproque, en s'inspirant du procédé suivant

Méthode 9.45 (pour retrouver la dérivée d'une bijection réciproque)

Illustration à l'aide des bijections réciproques tan et Arctan

1. Remarquer que $f^{-1} \circ f(x) = x \quad (x \in I)$

$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Dériver la relation précédente pour obtenir que $f'(x) \times (f^{-1})'(f(x)) = 1$ ($x \in I$)

$$\tan'(x) \times \text{Arctan}'(\tan(x)) = 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Diviser par $f'(x) \neq 0$ et simplifier en utilisant que $y = f(x)$ avec $x = f^{-1}(y)$ pour obtenir que

$$(f^{-1})'(y) = (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Après division par $\tan'(x) = \tan(x)^2 + 1$, il vient

$$\text{Arctan}'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\tan(x)^2 + 1} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

Comme $y = \tan(x)$ avec $x = \text{Arctan}(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$ et $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, il suit

$$\text{Arctan}'(y) = \frac{1}{y^2 + 1} \quad (y \in \mathbb{R})$$

9.4 Comparaison des fonctions

Séquence 27

9.4.1 Fonctions négligeables

programme

- Fonction négligeable au voisinage de a . Notation $f = o_a(g)$
- Extension au cas $a = \pm\infty$
- Comparaison des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes au voisinage de l'infini, des fonctions puissances et logarithmes en 0. On présentera à nouveau les croissances comparées rappelées au premier semestre.

Dans cette section, a désigne un nombre réel ou un symbole $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et f, g, h, F, G et ε désignent des fonctions définies autour de $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire sur un intervalle I admettant a comme élément ou comme extrémité. Pour simplifier, on note

$$\underbrace{f \underset{a}{\prec} g}_{\text{non standard}} \iff \left| \begin{array}{l} f = o_a(g) \\ f \text{ est négligeable devant } g \text{ en } a \end{array} \right.$$

fonction négligeable

Une fonction est négligeable en a devant une autre fonction lorsqu'elle est égale au produit de cette fonction par une fonction de limite nulle en a .

Définition 9.46 $f = o_a(g) \iff f(x) = g(x) \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon \xrightarrow{a} 0$

– Lorsque g ne s'annule pas autour de a , cela revient à dire que f/g tends vers 0 en a .

transitivité

En a , si f est négligeable devant g qui est négligeable h , alors f est négligeable devant h .

Propriété 9.47 $f \prec_a g \prec_a h \implies f \prec_a h$

somme
produit
puissance
multiple
quotient

Les relations suivantes permettent de simplifier des relations faisant intervenir sommes, produit, puissances et quotients.

Propriété 9.48 $f \prec g \iff \lambda f \prec \mu g$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*, \mu \in \mathbb{R}^*$)

Propriété 9.49 $(f \prec_a h \text{ et } g \prec_a h) \implies f + g \prec_a h$

Propriété 9.50 $(f \prec_a F \text{ et } g \prec_a G) \implies fg \prec_a FG$

Propriété 9.51 $f \prec g \implies f^k \prec g^k$ ($k \geq 1$)

Propriété 9.52 $f \prec g \implies \frac{1}{g} \prec_a \frac{1}{f}$ (f non nulle autour de a)

9.4.2 Fonctions équivalentes

programme

- Fonction équivalentes au voisinage de a . Notation $f = \underset{a}{\sim}(g)$
- $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g)$
- Extension au cas $a = \pm\infty$
- Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élevation à une puissance.

Dans cette section, a désigne un nombre réel ou un symbole $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et f, g, h, F, G et β désignent des fonctions définies autour de $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire sur un intervalle I admettant a comme élément ou comme extrémité.

fonctions équivalentes

Une fonction est équivalente en a à une autre fonction lorsqu'elle est égale au produit de cette fonction par une fonction de limite 1 en a .

Définition 9.53

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \left| \begin{array}{l} \\ f \text{ est équivalente à } g \text{ en } a \end{array} \right. \iff f(x) = g(x) \times \beta(x) \text{ avec } \beta \underset{a}{\rightarrow} 1$$

– Lorsque g ne s'annule pas, cela revient à dire que f/g tends vers 1 en a .

Propriété 9.54 $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g)$

Propriété 9.55 $f \underset{a}{\sim} f$

Propriété 9.56 $f \underset{a}{\sim} g \iff g \underset{a}{\sim} f$

transitivité En a , si f est équivalente à g qui est équivalente à h , alors f est équivalente à h .

Propriété 9.57 $f \underset{a}{\sim} g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{\sim} h$

signe Deux fonctions réelles équivalentes en a ont même signe autour de a .

Propriété 9.58 $f \underset{a}{\sim} g \implies f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes signes autour de a : ils sont tous les deux nuls, strictement positifs ou strictement négatifs

**produit
puissance
quotient**

Les relations suivantes permettent de simplifier des relations d'équivalence faisant intervenir produits, puissances et quotients.

Propriété 9.59 $(f \underset{a}{\sim} F \text{ et } g \underset{a}{\sim} G) \implies fg \underset{a}{\sim} FG$

Propriété 9.60 $f \underset{a}{\sim} g \implies f^k \underset{a}{\sim} g^k$

Propriété 9.61 $f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g} \quad (f \text{ non nul autour de } a)$

Attention : on n'a pas le droit d'ajouter des équivalents en général, c'est illégal. Pour

$$f(x) := 1, \quad F(x) := 1, \quad g(x) := -1 \quad \text{et} \quad G(x) := -1 + x,$$

par exemple, on a $f(x) \underset{0}{\sim} F(x)$, on a $g(x) \underset{0}{\sim} G(x)$ et pourtant on a

$$f(x) + g(x) = 0 \not\underset{0}{\sim} x = F(x) + G(x).$$

limite

Propriété 9.62 $f \underset{a}{\rightarrow} \ell \iff f \underset{a}{\sim} \ell \quad (\ell \neq 0)$
 $f \underset{a}{\rightarrow} 0 \iff f \underset{a}{\prec} 1$

comparaison
fonctions de
références

A l'infini et en zéro, un logarithme croît moins vite qu'un monôme. A l'infini, un monôme croît moins vite qu'une exponentielle (qu'une puissance).

Théorème 9.63 $\ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{\prec} x^\beta \underset{+\infty}{\prec} e^{\gamma x} \quad (\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0)$

Théorème 9.64 $\ln(x)^\alpha \underset{0^+}{\prec} x^{-\beta}$

9.5 Développements limités

Séquence 32 et 33

programme

L'étude des développements limités ne constitue pas une fin en soi et l'on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine. La composition des développements limités n'est pas au programme. On se limitera, en pratique, à des développements limités au voisinage de 0.

- Définition d'un développement limité. *On fera le lien entre un développement limité à l'ordre 1 et la valeur de la dérivée. On pourra introduire et manipuler la notation $x_n \varepsilon(x)$ avant l'utilisation éventuelle de la notation $o(x^n)$.*
- Somme et produit de développements limités.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^n (*Résultat admis*)
- Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sinus et cosinus).

Dans cette section, n désigne un nombre entier positif ou nul, f désigne une fonction, à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur un intervalle I , contenant au moins deux points, dont $a \in \mathbb{R}$ est un élément ou une extrémité. Nous abrégons « développement limité à l'ordre n en a » par DL_a^n (notation non standard) et nous notons le DL_a^n d'une fonction f de la façon suivante :

$$\underbrace{DL_a^n[f]}_{\text{non standard}} = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k$$

Par ailleurs, nous utilisons la notation $A \stackrel{*}{=} B$ pour exprimer que le terme A de gauche est égal à la troncature (obtenue en supprimant les termes négligeables) du terme B de droite

9.5.1 Généralités

Développe-
ment limité

Une fonction admet un développement limité à l'ordre n en a ssi elle se comporte essentiellement au voisinage de a comme un polynôme de degré inférieur à n

Définition 9.65 f admet un DL_a^n ssi il existe des nombres c_0, \dots, c_n de \mathbb{R} tels

$$\text{que } f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)$$

Propriété 9.66 Lorsqu'il existe, le $DL_a^n[f]$ est unique (c_0, \dots, c_n sont uniques).

– Si f admet en a un développement limité à l'ordre n , alors f admet pour chaque entier $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ un développement limité en a à l'ordre m et vérifie

$$f(x) = \sum_{k=0}^m c_k (x-a)^k + o_a((x-a)^m)$$

Autrement dit, le DL à l'ordre m de f est la troncature à l'ordre m du DL de f à l'ordre n (i.e. on ne garde que les termes de degré inférieur à m).

– Une fonction f a un DL_a^n ssi sa translatée $x \mapsto f(a+x)$ a un DL_0^n .

$$f \text{ a un } DL_a^n \iff \exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : f(a+u) = \sum_{k=0}^n c_k u^k + o_a(u^n)$$

9.5.2 Opérations

existence La somme, le produit et les multiples de fonctions avec un DL_a^n admettent un DL_a^n .

Propriété 9.67 Si f et g ont un DL_a^n , alors $DL_a^n[\lambda f] = \lambda DL_a^n[f]$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

Propriété 9.68 Si f et g ont un DL_a^n , alors $DL_a^n[f+g] = DL_a^n[f] + DL_a^n[g]$

Propriété 9.69 Si f et g ont un DL_a^n , alors $DL_a^n[f \times g] \stackrel{*}{=} DL_a^n[f] \times DL_a^n[g]$

9.5.3 Développements limités de référence

quotient

Propriété 9.70 $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o_0(x^n)$ ($n \in \mathbb{N}$)

– Cette formule est la plus important de toutes car elle permet d'effectuer les quotient de développements limités.

– Sans somme, cette formule devient

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_0(x^n)$$

A connaître

Propriété 9.71 $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n) \quad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 9.72 $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n) \quad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 9.73 $\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n}) \quad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 9.74 $\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+1}) \quad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 9.75 $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n) \quad (n \in \mathbb{N})$

9.5.4 Formule de Taylor-Young

Formule de Taylor-Young

Une fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage d'un point a admet un DL_a^n .

Théorème 9.76 Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction, à valeurs dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I contenant a . Alors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_a((x-a)^n).$$

primitive Les primitives F d'une fonction f admettant un DL_a^n admettent un DL_a^{n+1} .

Propriété 9.77 Soit F une primitive d'une fonction f admettant un DL_a^n , alors F admet un DL_a^{n+1} , que l'on trouve en intégrant celui de f . autrement dit,

$$DL_a^{n+1}[F]' = DL_a^n[f]$$

– Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue sur I et admet le DL_a^n

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n),$$

alors, une primitive F de f admet le DL_a^{n+1}

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o_a((x-a)^{n+1}).$$

Plus simplement, le DL d'une primitive est une primitive du DL

- on peut intégrer un DL_a pour trouver de DL d'une primitive (on y gagne un ordre de précision). Ne pas oublier la constante d'intégration

dérivée

Propriété 9.78 Si f admet un $DL_a^{n+1}[f]$ et si f' existe et admet un $DL_a^n[f']$, alors

$$DL_a^{n+1}[f]' = DL_a^n[f']$$

- Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I dont la dérivée f' admet le DL_a^n suivant

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n),$$

alors, la fonction f admet un DL_a^{n+1} donné par

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o_a((x-a)^{n+1}).$$

Plus simplement, le DL d'une dérivée est, lorsqu'il existe, la dérivée du DL

- Si f' admet un DL_a , alors f admet aussi un DL_a que l'on peut dériver pour trouver celui de f' (on y perd un ordre de précision).

10 Fonctions réelles (comportement global) Sé- quence 11

10.1 Fonctions réciproques

programme Représentation graphique de la fonction réciproque

Propriété 10.1 Soient f une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J . Alors, le graphe de f est le symétrique du graphe de f^{-1} par rapport à la droite d'équation $y = x$

10.2 Fonctions minorées, majorées et bornées

programme Fonctions majorées, minorées, bornées.

Dans toute cette section, m et M désignent des nombres réels, f désigne une fonction réelle et D un ensemble non vide inclus dans son ensemble de définition

ction minorée
ction majorée

Définition 10.2 f est majorée sur D ssi il existe M tel que $f(x) \leq M$ ($x \in D$)

Définition 10.3 f est minorée sur D ssi il existe m tel que $m \leq f(x)$ ($x \in D$)

Définition 10.4 f est bornée sur D ssi il existe M tel que $|f(x)| \leq M$ ($x \in D$)

Propriété 10.5 f est bornée sur D ssi f est minorée et majorée sur D

Propriété 10.6 Les fonctions constantes sont bornées sur \mathbb{R}

Propriété 10.7 L'ensemble des fonctions bornées sur D est stable par addition, multiplication externe et multiplication. En particulier, c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$

10.3 Fonctions monotones

programme

- Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones.
- Théorème de limite monotone. *Toute fonction monotone sur $]a, b[$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Comportement en a et b .*

Dans cette section, I est un intervalle contenant au moins 2 points et f est une fonction à valeurs réelle définie sur I

croissance
décroissance

Définition 10.8

$$f \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{croissante} \\ \text{strictement croissante} \end{array} \right. \text{ sur } I \iff \left\{ \begin{array}{l} f(y) \geq f(x) \\ f(y) > f(x) \end{array} \right. \quad (x < y \text{ dans } I)$$

Définition 10.9

$$f \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{décroissante} \\ \text{strictement décroissante} \end{array} \right. \text{ sur } I \iff \left\{ \begin{array}{l} f(y) \leq f(x) \\ f(y) < f(x) \end{array} \right. \quad (x < y \text{ dans } I)$$

monotonie

Définition 10.10 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, alors f est strictement monotone (resp. monotone) *ssi* f est strictement décroissante ou strictement croissante (resp. décroissante ou croissante).

Méthode 10.11 (Pour étudier la monotonie d'une fonction f)

1. Fixer $x < y$ dans I
2. Etudier le signe de $f(y) - f(x)$

minoration//majoration

Propriété 10.12 Une fonction monotone sur un segment est bornée

Propriété 10.13 Une fonction croissante sur $[a, b[$ est minorée sur $[a, b[$

Propriété 10.14 Une fonction croissante sur $]a, b]$ est majorée sur $]a, b]$

Propriété 10.15 Une fonction décroissante sur $]a, b]$ est minorée sur $]a, b]$

Propriété 10.16 Une fonction décroissante sur $[a, b[$ est majorée sur $[a, b[$

limite monotone

Théorème 10.17 Une fonction monotone sur un intervalle ouvert I admet une limite finie à droite et à gauche en chaque point de I

Pour la suite de cette section $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et f désigne une fonction définie sur $[a, b[$.

Théorème 10.18 Soit f une fonction croissante sur $[a, b[$. Alors,
 f majorée $\iff f$ admet une limite finie en b
 f non majorée $\iff f$ diverge vers $+\infty$ en b

Dans tous les cas, on a $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{[a, b[} f(x)$.

Théorème 10.19 Soit f une fonction décroissante sur $[a, b[$. Alors,

$$\begin{aligned} f \text{ minorée} &\iff f \text{ admet une limite finie en } b \\ f \text{ non minorée} &\iff f \text{ diverge vers } -\infty \text{ en } b \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \inf_{[a, b[} f(x)$.

– On peut également écrire des variantes de ce théorème sur des intervalles ouverts à gauche $]b, a]$.

10.4 Fonctions paires et impaires

programme Fonctions paires et impaires.

10.4.1 Généralités

Dans cette section, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une application définie sur un ensemble I symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire vérifiant

$$x \in I \iff -x \in I \tag{10.1}$$

Remarque : dans la proposition (10.1), on peut remplacer le symbole \iff par \implies

parité

Définition 10.20 f est paire sur $I \iff f(-x) = f(x) \quad (x \in I)$

imparité

Définition 10.21 f est impaire sur $I \iff f(-x) = -f(x) \quad (x \in I)$

déterminer la parité d'une fonction sur I

Méthode 10.22 (Pour déterminer la parité d'une fonction sur I)

1. Vérifier rapidement que I satisfait (10.1)
2. Fixer $x \in I$ et simplifier $f(-x)$ (*étape généralement simple, mais parfois technique*).
3. Si l'on obtient $f(x)$, la fonction f est paire.
Si l'on obtient $-f(x)$, la fonction est impaire.
Dans les autres cas, la fonction est en général ni paire, ni impaire mais pas toujours.

– Il n'est quasiment jamais demandé (cela ne sert pas) de prouver qu'une fonction n'est pas paire ou qu'elle n'est pas impaire.

Pour y arriver, il faut exhiber un contre-exemple

fonctions de référence

Propriété 10.23 Les fonctions constantes sont paires sur \mathbb{R}

Propriété 10.24 La fonction identité de \mathbb{R} est impaire sur \mathbb{R}

condition nécessaire d'imparité

Propriété 10.25 Si $0 \in I$ et si f est impaire sur I , alors $f(0) = 0$

10.4.2 Opérations

Dans cette section, nous détaillons rapidement quelques opérations qui permettent de déterminer plus rapidement (que par le calcul) si une fonction est paire ou impaire. Pour expliciter ces opérations, nous utilisons une notation pratique mais non standard

paire + paire = paire	impaire + impaire = impaire
paire \times paire = paire	paire \times impaire = impaire
impaire \times impaire = paire	$\frac{\text{paire}}{\text{paire}} = \text{paire}$
$\frac{\text{paire}}{\text{impaire}} = \text{impaire}$	$\frac{\text{impaire}}{\text{paire}} = \text{impaire}$
$\frac{\text{impaire}}{\text{impaire}} = \text{paire}$	fonction \circ paire = paire
impaire \circ impaire = paire	paire \circ impaire = paire

Comme pour les limites, il existe quelques opérations, dont il n'est pas possible à priori de prévoir le résultat (formes indéterminées), sans faire un calcul détaillé, comme « paire + impaire = ? »

dérivation

Propriété 10.26 Soit f une fonction dérivable sur I . Alors,

$$\begin{aligned} f \text{ paire sur } I &\implies f' \text{ impaire sur } I \\ f \text{ impaire sur } I &\implies f' \text{ paire sur } I \end{aligned}$$

réciroque

Propriété 10.27 Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection impaire. Alors, J satisfait (10.1) et la bijection réciproque f^{-1} est impaire sur J

– Une fonction paire ne peut pas être bijective

10.5 Fonctions périodiques

programme Fonctions périodiques

10.5.1 Généralités

Dans cette section, T désigne un nombre réel non nul et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une application définie sur un ensemble I invariant par la translation suivante

$$x \in I \iff x + T \in I \tag{10.2}$$

Remarque : dans la proposition (10.2), on ne peut pas remplacer le symbole \iff par le symbole \implies

périodicité

Définition 10.28 f est T -périodique sur I \iff f admet la période T sur I $\iff f(x+T) = f(x) \quad (x \in I)$

– Une fonction périodique ne peut pas être bijective

anti-périodicité

Définition 10.29 f est T anti-périodique sur I \iff f admet l'anti-période T sur I $\iff f(x+T) = -f(x) \quad (x \in I)$

déterminer la périodicité d'une fonction sur I

Méthode 10.30 (Pour déterminer la périodicité d'une fonction sur I)

1. Intuire le plus petit nombre réel (en valeur absolue) pour lequel I satisfait (10.1) et qui semble convenir pour f
2. Fixer $x \in I$ et simplifier $f(x+T)$ (étape généralement simple, mais parfois technique).
3. Si l'on obtient $f(x)$, la fonction f est périodique, de période T .
Si l'on obtient $-f(x)$, la fonction est antipériodique, d'anti-période T .
Dans les autres cas, la fonction est en général ni périodique, ni antipériodique mais pas toujours.

– Il n'est quasiment jamais demandé (cela ne sert pas) de prouver qu'une fonction n'est pas périodique ou qu'elle n'est pas antipériodique.

Pour y arriver, il faut exhiber un contre-exemple

périodes

Propriété 10.31 T période $\implies k \times T$ période $\quad (k \in \mathbb{Z}^*)$

Propriété 10.32 T anti-période $\implies \begin{cases} k \times T & \text{période} & (k \in \mathbb{Z}^* \text{ pair}) \\ k \times T & \text{anti-période} & (k \in \mathbb{Z}^* \text{ impair}) \end{cases}$

– Il est souvent utile de trouver la plus petite période (ou anti-période) d'une fonction. En général, on la cherche parmi les diviseurs d'un nombre convenable $T \neq 0$ précédemment trouvé

fonctions de référence

Propriété 10.33 Pour $T \neq 0$, les fonctions constantes sont T -périodiques sur \mathbb{R}

10.5.2 Opérations

Dans cette section, nous détaillons rapidement quelques opérations qui permettent de déterminer plus rapidement (que par le calcul) si une fonction est périodique (**pour**

le même $T \neq 0$) ou antipériodique. Pour expliciter ces opérations, nous utilisons une notation pratique mais non standard

périodique + périodique = périodique	antipériodique + antipériodique = antipériodique
périodique \times périodique = périodique	périodique \times antipériodique = antipériodique
antipériodique \times antipériodique = périodique	$\frac{\text{périodique}}{\text{périodique}} = \text{périodique}$
$\frac{\text{périodique}}{\text{antipériodique}} = \text{antipériodique}$	$\frac{\text{antipériodique}}{\text{périodique}} = \text{antipériodique}$
$\frac{\text{antipériodique}}{\text{antipériodique}} = \text{périodique}$	fonction \circ périodique = périodique

Comme pour les limites, il existe quelques opérations, dont il n'est pas possible à priori de prévoir le résultat (formes indéterminées), sans faire un calcul détaillé, comme

$$\text{périodique} + \text{antipériodique} = ? \quad \text{fonction} \circ \text{antipériodique} = ?$$

dérivation

Propriété 10.34 Soit f une fonction dérivable sur I . Alors,

$$\begin{aligned} f \text{ } T\text{-périodique sur } I &\implies f' \text{ } T \text{ périodique sur } I \\ f \text{ } T\text{-antipériodique sur } I &\implies f' \text{ } T\text{-antipériodique sur } I \end{aligned}$$

10.6 Fonctions continues

programme

- Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment). Notations $\max_{[a,b]} f$ et $\min_{[a,b]} f$.
- Théorème de la bijection. *Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation. On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithme, méthode de dichotomie.*
- Représentation graphique de la fonction réciproque.

10.6.1 Généralités

Dans cette section, D désigne un ensemble et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un domaine A réel

continuité sur
un ensemble

Définition 10.35 f continue sur $D \iff (f \text{ est continue en } a \text{ pour } a \in D) \quad (D \subset D_f)$

– Lorsqu'on dit qu'une fonction est continue, sans préciser sur quelle ensemble, cela sous-entend qu'elle l'est sur son ensemble de définition. En cas d'ambiguïté, il faut le préciser.

Propriété 10.36 Les fonctions constantes sont continues.

Propriété 10.37 La fonction identité est continue.

Propriété 10.38 Les fonctions polynômes sont continues.

espace

Définition 10.39 $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$

Propriété 10.40 $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -SEV de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

opérations
algébriques

Propriété 10.41 La somme, les multiples et le produit de fonctions continues sur un ensemble D est continue sur D .

– En particulier, on calcule avec les fonctions continues comme avec les nombres réels

quotient

Le quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de deux fonctions continues est continue.

Propriété 10.42 Soient f et g des fonctions continues sur D telles que $g(a) \neq 0$ ($a \in D$). Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie et continue sur D .

composée

Lorsque cela a un sens, la composée de deux fonctions continues est continue

Théorème 10.43 Soient deux applications $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Alors,

$$\left. \begin{array}{l} f(I) \subset J \\ f \text{ continue sur } I \\ g \text{ continue sur } J \end{array} \right\} \implies g \circ f \text{ continue sur } I$$

réciroque

La bijection réciproque d'une bijection f continue est continue.

Propriété 10.44 Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection continue sur I . Alors, la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J .

10.6.2 Théorèmes fondamentaux

théorème fon-
damental

Théorème 10.45 L'image d'un intervalle par une fonction continue réelle est un intervalle

Théorème 10.46 L'image d'un segment par une fonction continue réelle est un segment

– Ce théorème est à la fois un théorème de compacité (concernant les majorations, minima et maxima globaux de la fonction) et un théorème de connexité (affirmant que l'image de l'ensemble de départ (qui est en un morceau) est en un morceau)

Corollaire 10.47 Une fonction continue sur un segment est bornée

Corollaire 10.48 Une fonction périodique et continue sur \mathbb{R} est bornée

théorème des
valeurs in-
termédiaires

Théorème 10.49 Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$

– Autrement dit, pour chaque $y \in]f(a), f(b)[$, il existe $x \in]a, b[$ tel que $y = f(x)$. Toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes entre a et b par la fonction f .

– Ce théorème est un corollaire du théorème précédent

Le corollaire suivant est communément utilisé pour remplir plus rapidement la ligne du signe de f' dans les tableaux de variation

Corollaire 10.50 Une fonction réelle continue sur $[a, b]$ qui s'annule uniquement en a et en b est soit strictement positive sur $]a, b[$, soit strictement négative sur $]a, b[$

théorème des
valeurs in-
termédiaires

Propriété 10.51
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur }]a, b[\\ f \xrightarrow{a^+} \ell \\ f \xrightarrow{b^-} \ell' \end{array} \right\} \implies]\ell, \ell'[\subset f(]a, b[)$$

– Autrement dit, pour chaque $y \in]f(a), f(b)[$, il existe $x \in]a, b[$ tel que $y = f(x)$. Toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes entre a et b par la fonction f .

– Ce théorème est un corollaire du théorème précédent

théorème de
la bijection

Théorème 10.52 Soit f une application réelle, continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors, f est une bijection strictement monotone de I sur $J = f(I)$, qui est un intervalle. La bijection réciproque f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation que f

caractérisation Lorsqu'une fonction réelle possède sur un intervalle I deux des caractéristiques suivantes : bijective, monotonie stricte, continuité, elle possède également la troisième.

Théorème 10.53 Soit f une application réelle définie sur un intervalle I . Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ monotone stricte sur } I \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ bijective sur } I \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ bijective sur } I \\ f \text{ monotone stricte sur } I \end{array} \right\}$$

– En particulier, la bijection réciproque d'une bijection strictement monotone sur un intervalle est également strictement monotone, de même sens de variation.

10.6.3 Continuité par morceaux

Séquence 16

programme Fonction continue par morceaux. Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$. On exclut toute étude approfondie des fonctions continues par morceaux.

subdivisions

Définition 10.54 Une subdivision d'un segment $[a, b]$ est une suite strictement croissante finie $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, on a

$$a = \underbrace{x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n}_{\text{subdivision } \sigma} = b.$$

fonctions continues par morceaux

Définition 10.55 Etant donné un segment $[a, b]$, on dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ du segment $[a, b]$ telle que, pour $1 \leq i \leq n$, la restriction à l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de f soit prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$.

Propriété 10.56 Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ ssi il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ du segment $[a, b]$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur }]x_{i-1}, x_i[\\ f \text{ admet une limite finie à droite en } x_{i-1} \\ f \text{ admet une limite finie à gauche en } x_i \end{array} \right. \quad (1 \leq i \leq n)$$

– autrement dit, pour $1 \leq i \leq n$, la fonction f doit être continue sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ et admet une limite à droite en x_{i-1} et une limite à gauche en x_i .

– une telle subdivision σ est alors dite adaptée (ou subordonnée) à f .

– on se moque totalement des valeurs de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

Méthode 10.57 (pour prouver qu'une fonction $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux)

1. Déterminer une subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ adaptée à f (les morceaux)
2. Fixer $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et se restreindre à l'étude de f sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ (en général, on dispose d'une formule pour f sur cet intervalle)
 - a. Prouver que f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$
 - b. Prouver que f admet une limite finie à droite en x_{i-1} (il n'est pas nécessaire de la calculer)
 - c. Prouver que f admet une limite finie à gauche en x_i (il n'est pas nécessaire de la calculer)

Propriété 10.58 Une fonction continue sur un segment est continue par morceaux sur ce segment

Propriété 10.59 L'ensemble des fonctions continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est stable par addition, par multiplication externe et par produit. En particulier, c'est un SEV de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

– la composée $g \circ f$ d'une fonction g continue avec une fonction f continue par morceaux est de classe \mathcal{C}^k par morceaux.

10.7 Fonctions dérivées

Séquence 12

programme

- Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée. *Notation f' .*
- Dérivée d'un polynôme.
- Dérivation des fonctions réciproques.
- Théorème de Rolle.
- Égalité et inégalités des accroissements finis.
 - Si $m < f' < M$ sur un intervalle I , alors $\forall (a,b) \in I^2, a < b, m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a)$.
 - Si $|f'| < k$ sur un intervalle I , alors $\forall (a,b) \in I^2, |f(b) - f(a)| < k|b-a|$.
 Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. *Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.*
- Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée. *Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geq 0$ sur I , f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .*
- Définition et dérivation de la fonction Arctan. *L'étude de cette fonction se limitera strictement à ces deux points.*

10.7.1 Généralités

Dans cette section, D désigne un ensemble non vide inclus dans l'ensemble de définition d'une fonction f à valeurs dans \mathbb{R}

é
r
i
v
a
b
i
l
i
t
é
s
u
r
u
n
e
n
s
e
m
b
l
e

Définition 10.60 f dérivable sur D ssi f dérivable en chaque point $x \in D$

– La dérivabilité en un point a est une notion locale alors que la dérivabilité sur un intervalle est une notion globale. Cette définition est le lien entre les deux notions.

n
c
t
i
o
n
d
é
r
i
v
é
e

Définition 10.61 La fonction dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$

Propriété 10.62 $\mathcal{D}f' = \{x : f \text{ dérivable en } x\} = \{x : f'(x) \text{ existe}\}$

– La restriction au départ de f' à l'ensemble de dérivabilité de f est une application

– La fonction dérivée f' de l'application f est plus rarement notée $\frac{df}{dx}$ ou encore Df

– Il existe des fonctions continues sur \mathbb{R} qui ne sont dérivables en aucun point.

Propriété 10.63 $\mathcal{D}f' \subset \mathcal{D}f$

c
l
a
s
s
e
 \mathcal{C}^1

Définition 10.64 $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable sur } I : f' \in \mathcal{C}^0(I)\}$

Propriété 10.65 $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable sur } I : f \text{ et } f' \text{ continues sur } I\}$

– f est de classe \mathcal{C}^0 sur I ssi f est continue sur I .

– f est de classe \mathcal{C}^1 sur I ssi f est dérivable de dérivée continue sur I .

Propriété 10.66 $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -SEV de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

10.7.2 Opérations

Dans cette section, f et g désignent des fonctions dérivables sur le même intervalle $I \neq \emptyset$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, les opérations décrites sont également valables si l'on remplace « dérivable » par « de classe \mathcal{C}^1 » dans toute la section

s
o
m
m
e
m
u
l
t
i
p
l
i
c
é
l
i
n
é
a
r
i
t
é

Propriété 10.67 $f + g$ est dérivable sur I

Propriété 10.68 $\lambda \cdot f$ est dérivable sur I

Propriété 10.69 $f \times g$ est dérivable sur I

- Les constantes et l'application identité $x \mapsto x$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}
- Les fonctions polynômes sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et leurs dérivées sont des polynômes. A fortiori, on peut les dériver indéfiniment.

quotient

Propriété 10.70 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications dérivables sur I telles que $g(x) \neq 0$ ($x \in I$). alors, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I

composée

Théorème 10.71 Soient deux applications $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I , $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J telles que $f(I) \subset J$. Alors, la composée $g \circ f$ est dérivable sur I

- Cette propriété est également valable si l'on remplace la condition « de classe \mathcal{C}^n » par « n fois dérivable ».

bijection réciproque

Théorème 10.72 Soit f une bijection de I dans J , dérivable sur I telle que $f'(x) \neq 0$ ($x \in I$). Alors, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur J .

10.7.3 Monotonie

Dans cette section, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction dérivable sur I , **intervalle** contenant au moins deux points.

fonctions constantes

Théorème 10.73 f constante sur $I \iff f'(x) = 0$ ($x \in I$)

monotonie

Propriété 10.74 f croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ ($x \in I$)
 f décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0$ ($x \in I$)

- Cette propriété est vraie également lorsque f est continue mais pas dérivable aux extrémités de I

cte monotonie

Propriété 10.75 $f'(x) > 0$ ($x \in I$) $\implies f$ croissante stricte sur I
 $f'(x) < 0$ ($x \in I$) $\implies f$ décroissante stricte sur I

- Cette propriété est vraie également lorsque f est continue mais pas dérivable aux extrémités de I

Théorème 10.76 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un **intervalle** I , contenant au moins deux points, **dont la dérivée s'annule au plus en un nombre fini de points**. Alors,

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad (x \in I) &\implies f \text{ croissante stricte sur } I \\ f'(x) \leq 0 \quad (x \in I) &\implies f \text{ décroissante stricte sur } I \end{aligned}$$

– Il existe des fonctions strictement croissantes dont la dérivée s'annule, comme $x \mapsto x^3$.

10.7.4 Théorèmes fondamentaux

Dans cette section, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

théorème
de Rolle

Théorème 10.77 $f(a) = f(b) \implies (\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0)$

égalité des ac-
cissements finis

Théorème 10.78 $\exists c \in]a, b[: f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

égalités des ac-
cissements finis

Théorème 10.79

$$m \leq f'(x) \leq M \quad (a < x < b) \implies m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Théorème 10.80

$$|f'(x)| \leq M \quad (a < x < b) \implies |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

– si la dérivée f' d'une application $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est majorée par M sur I , alors, l'application f est M -lipschitzienne sur I .

prolongement \mathcal{C}^1

Théorème 10.81 Soit I un intervalle contenant au moins 2 points, dont a , et f une fonction continue sur I , de classe \mathcal{C}^1 sur $I \setminus \{a\}$ telle que f' admet une limite finie en a . Alors, l'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

10.7.5 Fonctions de classe \mathcal{C}^n

Séquence 27

programme

- Fonction p fois dérivable en un point.
- Fonctions de classe \mathcal{C}^p , de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle.
- Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.
- La dérivée $(n + 1)^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

Dans cette section, $n \geq 2$ désigne un nombre entier et f désigne une fonction définie sur un intervalle I contenant au moins 2 points

fonction déri-
vable n fois

Définition 10.82 f dérivable n fois sur $I \iff \begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ f' \text{ dérivable } n - 1 \text{ fois sur } I \end{cases}$

Définition 10.83 La dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une application f dérivable n fois sur I est l'application $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f^{(n)}(x) := (f')^{(n-1)}(x) \quad (x \in I)$

Convention 10.84 La dérivée d'ordre 0 de f est l'application $f^{(0)} = f$

– Etant donné une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, par convention, on note

$$\forall x \in I, \quad f^{(0)}(x) := f(x).$$

La fonction $f^{(0)} = f$ est parfois appelée dérivée d'ordre 0 de la fonction f .

– Etant donnée une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable sur I , on a

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) := \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{d}{dx}}_{n \text{ dérivations successives}} f(x)$$

– la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f se note $f^{(n)}$ ou plus rarement $\frac{d^n}{dx^n} f$ ou $D^n f$.

fonction indéfiniment dérivable

Définition 10.85 f indéfiniment dérivable sur I si f est dérivable n fois pour $n \in \mathbb{N}$

Propriété 10.86 Les fonctions constantes et identité $x \mapsto x$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

Pour la suite de cette section, $n \geq 1$ et f désigne une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant au moins 2 points

dérivations successives

Propriété 10.87 $f^{(n)} = \left(f^{(p)}\right)^{(n-p)}(x) \quad (0 \leq p \leq n)$

espace \mathcal{C}^k

Définition 10.88 $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} : f' \in \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})\} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Propriété 10.89 $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ forme un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}$

– Pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $(\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est constitué des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n sur I , c'est à dire des applications $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois sur I dont les dérivées $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont continues sur I .

Propriété 10.90 $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \iff f$ dérivable n fois sur I et $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \text{ continue sur } I \end{cases}$

Propriété 10.91 $\mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \quad (n \in \mathbb{N})$

- La suite des ensembles $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, construite par récurrence à partir de $n = 1$, est décroissante au sens de l'inclusion.
- On note souvent $\mathcal{C}^n(I)$ plutôt que $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

espace \mathcal{C}^∞

Définition 10.92 $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ indéfiniment dérivable}\}$

Propriété 10.93 $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})\}$

- f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I ssi elle est indéfiniment dérivable sur I

Propriété 10.94 $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ forme un \mathbb{R} -sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

10.7.6 Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^n Séquence 27

Dans cette section, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g sont des fonctions dérivables n fois sur le même intervalle $I \neq \emptyset$. Par ailleurs, les propriétés décrites sont également valables si l'on remplace « dérivable n fois » par « de classe \mathcal{C}^n » et « indéfiniment dérivables » par « de classe \mathcal{C}^∞ » dans toute la section

somme
multiple
linéarité

Propriété 10.95 Les sommes, les multiples et les produits de fonctions dérivables n fois sur I sont dérivables n fois sur I

Corollaire 10.96 Les fonctions polynômes sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} .

Propriété 10.97 $(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \quad (x \in I)$

Propriété 10.98 $(\lambda \cdot f)^{(n)}(x) = \lambda \cdot f^{(n)}(x) \quad (x \in I)$

- Dériver n fois est une opération linéaire. En particulier, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe \mathcal{C}^n sur I et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

formule
de Leibniz

Théorème 10.99 $(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x) \quad (x \in I)$

- Cette propriété est également valable lorsque l'on remplace la condition « de classe \mathcal{C}^n » par « n fois dérivable »

quotient

Propriété 10.100 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des applications dérivables n fois sur I telles que $g(x) \neq 0$ ($x \in I$). Alors, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable n fois sur I

– Cette propriété est également valable si l'on remplace la condition « de classe \mathcal{C}^n » par « n fois dérivable ».

– Les fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} privé des points annulant leur dénominateur.

composée

Théorème 10.101 Soient deux applications $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois sur I et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois sur J telles que $f(I) \subset J$. Alors, la composée $g \circ f$ est dérivable n fois sur I

– Cette propriété est également valable si l'on remplace la condition « dérivable n fois » par « classe \mathcal{C}^n ».

bijection réciproque

Théorème 10.102 Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection n fois dérivable sur I telle que $f'(x) \neq 0$ ($x \in I$). Alors, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable n fois sur J .

10.8 Étude globale des fonctions d'une variable

Dans cette section, nous cherchons à étudier une fonction f qui n'est connue que par la donnée d'une formule pour $f(x)$

algorithme classique d'étude

Méthode 10.103 (Algorithme classique d'étude)

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}f$ de f
2. Étudier la périodicité de f pour réduire l'étude à un ensemble de longueur T bien choisi (*optionnel mais réduit le travail*).
3. Étudier la parité de f pour réduire l'étude à la partie positive d'un ensemble symétrique par rapport à 0 (*optionnel mais réduit le travail*)
4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}f'$ de f
5. Déterminer le signe de la dérivée sur l'ensemble d'étude. *c'est la partie technique de l'algorithme, dans les cas les plus difficiles, il n'est pas rare de devoir dresser le tableau de variation d'une autre fonction bien choisie pour y arriver*
6. Dresser un tableau de variation de f (reporter +, - et 0 dans la ligne du signe de f' et les flèches de monotonie et valeurs pour f)
7. Compléter le tableau de variation avec les limites (aux extrémités des flèches)
8. Déterminer les tangentes (dans la ligne des éléments géométriques) (*optionnel mais nécessaire pour obtenir un graphe ressemblant*)

9. Etudier les branches infinies (branches paraboliques, asymptotes, position par rapport aux asymptotes) (*optionnel, augmente légèrement la précision du graphe*)
 10. tracer l'allure du graphe de f

10.9 Recherche d'extrema

Séquence 34, 35, et 36

10.10 Fonctions convexes

Séquence 34, 35, et 36

convexité

Définition 10.104 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalle.

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall x, y \in I, f(ax + by) \geq af(x) + bf(y)$$

- De manière identique, la concavité est définie par :

$$f \text{ concave sur } I \iff \forall x, y \in I, f(ax + by) \leq af(x) + bf(y)$$

- une fonction est convexe (resp. concave) si tout sous-arc de son graphe est sous (resp. au dessus de) sa corde.

inégalité de convexité

Propriété 10.105 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

$$\forall n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \in I, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k = 1 \implies f\left(\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k f(x_k).$$

caractérisation

Propriété 10.106 Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

$$f \text{ convexe sur } I \iff f' \text{ croissante sur } I$$

Propriété 10.107 Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0.$$

- f est convexe sur I ssi $-f$ est concave sur I .
- On a la même propriété avec « concave » à la place de « convexe » et « décroissante » à la place de « croissante »
- Si elle est convexe (resp. concave), une courbe de classe \mathcal{C}^1 est située au dessus (resp. au dessous) de ses tangentes.
- Etant donnée une courbe convexe (resp. concave), les cordes dont l'une extrémité est fixée sur la courbe et dont l'autre extrémité décrit la courbe (dans le sens positif) sont de pente croissante (resp. décroissante).

11 Intégration

11.1 Primitives

Séquence 16

programme

- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. *Résultat admis.*

Dans cette section, F et f désignent des fonctions définies sur un intervalle I

primitives

Définition 11.1 F est une primitive de f sur l'intervalle I ssi F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$ ($x \in I$)

Notation 11.2 Une primitive F de f sur un intervalle I se note $F(x) = \int f(t)dt$ ($x \in I$)

Propriété 11.3 Si F et G sont deux primitives à valeurs dans \mathbb{R} d'une fonction f sur un intervalle I , alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + c$ ($x \in I$)

– Ne jamais oublier la constante d'intégration lorsque l'on intègre !

Propriété 11.4 Une primitive sur I d'une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I

existence de primitives

Théorème 11.5 Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle

primitives de référence

Propriété 11.6 $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ ($\alpha \neq -1, x > 0$)

Propriété 11.7 $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ ($x > 0$ ou $x < 0$)

Propriété 11.8 $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$ ($x \in \mathbb{R}$)

Propriété 11.9 $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$ ($x \in \mathbb{R}$)

Propriété 11.10 $\int e^x dx = e^x + c$ ($x \in \mathbb{R}$)

Propriété 11.11 $\int \ln(x)dx = x \ln(x) - x + c \quad (x > 0)$

Propriété 11.12 $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{Arctan}(x) + c \quad (x \in \mathbb{R})$

11.2 Intégrales sur un segment

Séquence 16 et 17

11.2.1 Intégrale des fonctions continues

programme Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Si f est continue sur un intervalle I , pour tout $(a,b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I . Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I .

Dans cette section, f désigne une application à valeurs dans \mathbb{R} , continue sur un segment $[a,b]$

Définition 11.13 L'intégrale de a à b d'une fonction continue $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ est

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

où F désigne n'importe laquelle des primitives de f sur le segment $[a,b]$

– La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive F choisie pour la calculer

Théorème 11.14 Soit f une fonction continue sur un intervalle I , contenant a . Alors, l'unique primitive de f sur I , s'annulant en a , est l'application F définie par

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur I

Propriété 11.15 Pour toute primitive F sur un intervalle I d'une fonction f continue sur I , on a

$$\int_a^x f(t)dt = [F]_a^x = F(x) - F(a) \quad (x \in I).$$

En particulier, pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur I , on a

$$\int_a^x f'(t)dt = [f]_a^x = f(x) - f(a).$$

11.2.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

programme Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Si f est continue sur un intervalle I , pour tout $(a,b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I . Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I .

intégrale

Définition 11.16 L'intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ est

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt,$$

où $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ désigne une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f .

– Cette intégrale ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie. Par ailleurs, chaque petite intégrale est définie en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue (le prolongement par continuité à $[x_{k-1}, x_k]$ de la restriction de f à $]x_{k-1}, x_k[$

Méthode 11.17 (en présence d'une intégrale) Vérifier qu'elle est bien définie, c'est-à-dire qu'on intègre une fonction continue (par morceaux) sur $[a,b]$, avant de la manipuler

– L'aire (algébrique) de la zone délimitée, pour $a \leq x \leq b$, par l'axe des abscisses et le graphe d'une fonction f continue par morceaux est, par définition, l'intégrale de f de a à b .

– Modifier les valeurs d'une fonction en un nombre fini de points ne modifie pas son intégrale.

11.2.3 Propriétés

programme

- Relation de Chasles.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
- Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance. Si f est continue sur $[a,b]$ et $a < b$,

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| < \int_a^b |f(t)|dt$$

- Cas d'une fonction continue, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle.

- Intégration par parties.
- Changement de variable. *Les changements de variable non affines devront être indiqués aux candidats.*

Dans cette section, f et g désignent des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , continues par morceaux sur un segment $[a,b]$?

Propriété 11.18 Soit f une fonction à valeurs dans \mathbb{R} , continue par morceaux sur un segment contenant a , b et c . Alors, $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Propriété 11.19 $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$)

Propriété 11.20 $a \leq b$ et $\underbrace{f(x) \geq 0}_{f \geq 0} \quad (a \leq x \leq b) \implies \int_a^b f \geq 0$

Propriété 11.21 $a \leq b$ et $\underbrace{f(x) \geq g(x)}_{f \geq g} \quad (a \leq x \leq b) \implies \int_a^b f \geq \int_a^b g$

Propriété 11.22 L'application $|f|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

caractérisation

Théorème 11.23 Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et à valeurs positives ou nulles. Alors,

$$\underbrace{f(x) = 0}_{f=0} \quad (a \leq x \leq b) \iff \int_a^b f(t)dt = 0.$$

Dans cette section, I désigne un intervalle et les nombres réels a et b vérifient $a < b$.

Théorème 11.24 Soient f et g des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Théorème 11.25 Soient f une fonction continue (par morceaux) sur $[c,d]$ et $\varphi : [a,b] \rightarrow [c,d]$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Intégration
par parties

changement
de variables

Corollaire 11.26 Soient f une fonction continue (par morceaux) sur $[c,d]$ et $\varphi : [a,b] \rightarrow [c,d]$ une bijection de classe \mathcal{C}^1 sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_c^d f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

– C'est le théorème précédent avec appliqué pour $c = \varphi(a)$, $d = \varphi(b)$, $a = \varphi^{-1}(c)$ et $b = \varphi^{-1}(d)$

11.2.4 Sommes de Riemann

programme

Sommes de Riemann à pas constant. *La convergence des sommes de Riemann ne sera démontrée que dans le cas d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Interprétation de l'intégrale en termes d'aire.*

Théorème 11.27 Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

– Méthode des trapèzes pour calculer des intégrales. Plutôt que de calculer l'aire en utilisant des rectangles à l'aide de la formule $(x_{i+1} - x_i)f(y_i)$, on calcule l'aire en utilisant des trapèzes à l'aide de la formule

$$(x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2},$$

donnant l'aire du trapèze passant par $A(x_i,0)$, $B(x_i,f(x_i))$, $C(x_{i+1},0)$ et $D(x_{i+1},f(x_{i+1}))$. Ainsi, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

11.3 Intégrales sur un intervalle quelconque

Séquence 28

11.3.1 Intégrale généralisée simple

dans cette section, f et g désignent des fonctions continues par morceaux sur chaque segment inclus dans un intervalle I fermé en $a \in \mathbb{R}$ et ouvert en b , qui peut être un nombre réel ou l'un des symboles $-\infty$ ou $+\infty$.

Définition 11.28 L'intégrale suivante converge et est égale à

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt,$$

si, et seulement si, la limite existe et est finie. Dans le cas contraire, l'intégrale diverge.

Propriété 11.29 Si f admet une limite finie en $b \in \mathbb{R}$, alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge. Notant \tilde{f} le prolongement par continuité de f en b , on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \underbrace{\tilde{f}(t)}_{\text{continue sur le segment } [a,b]} dt$$

11.3.2 Intégrales des fonctions positives

Dans cette section, f et g désignent des fonctions continues et **positives** sur l'intervalle $[a, b[$ ou $a \in \mathbb{R}$ et ou b est un nombre réel ou le symbole $+\infty$.

Propriété 11.30 $\int_a^b f$ converge $\iff \underbrace{\exists M \geq 0, \int_a^x f(t) dt \leq M \quad (a \leq x < b)}_{\text{la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est majorée sur } [a, b[}$

Théorème 11.31 Supposons que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour $a \leq x < b$.

- Si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.
- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge et $0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Théorème 11.32 Supposons que $f = o_b(g)$. Alors,

- Si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge et $\int_a^x f = o_b(\int_a^x g)$ (hors programme)
- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge et $\int_x^b f = o_b(\int_x^b g)$ (hors programme)

Théorème 11.33 Supposons que $f \sim_b g$. Alors, $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ ont même nature.

- En cas de divergence, $\int_a^x f \sim_b \int_a^x g$ (hors programme)
- En cas de convergence, $\int_x^b f \sim_b \int_x^b g$ (hors programme)

11.3.3 Intégrales généralisées complexes

Dans cette section, f désigne une fonction continue sur $]a_1, a_2[\cup \dots \cup]a_{n-1}, a_n[$ ou $\bigcup_{k=1}^n]a_k, a_{k+1}[$, où $a = a_1 < \dots < a_n = b$ désignent des nombres réels ou les symboles $-\infty$ et $+\infty$

Définition 11.34 L'intégrale suivante converge et vaut

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \left(\int_{a_k}^{c_k} f + \int_{c_k}^{a_{k+1}} f \right)$$

ssi pour $1 \leq k \leq n$ et $c_k \in]a_k, a_{k+1}[$ quelconque, les intégrales $\int_{a_k}^{c_k} f$ et $\int_{c_k}^{a_{k+1}} f$ convergent.

Propriété 11.35 $\int_c^b f$ converge $\iff \int_a^b f$ converge $(c \in I)$

Lorsque les intégrales convergent, on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Propriété 11.36 $\int_a^b \lambda f$ converge $\iff \int_a^b f$ converge $(\lambda \neq 0)$

De plus, en cas de convergence $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

Propriété 11.37

- Si $\int_a^b f$ converge et si $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^b (f + g)$ diverge.
- Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (f + g) dt$ converge et

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Corollaire 11.38 Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}).$$

Conver-
gence absolue

Définition 11.39 $\int_a^b f$ converge absolument ssi $\int_a^b |f|$ converge

Propriété 11.40 Si $a \leq b$ et si $\int_a^b f$ converge absolument, alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

11.3.4 théorème fondamentaux

En ECS, il est clairement indiqué que les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) doivent être pratiquées sur des intégrales sur un segment. A fortiori, pour appliquer ces techniques à une intégrale généralisée, il faudra d'abord « poser un x » et écrire que

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt,$$

puis appliquez les théorèmes, vus au premier semestre à l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$

Comme la formulation du programme officiel n'interdit pas le calcul de primitive

sur un intervalle ou l'usage de la notation $[f]_{-\infty}^{+\infty}$, il pourra nous arriver d'utiliser les propriétés suivantes :

Notation 11.41 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, b[$, où a et b sont des nombres réels où les symboles $-\infty$ ou $+\infty$. Lorsque les limites suivantes sont toutes les deux définies, on note

$$\left[f(t) \right]_a^b = \lim_{t \rightarrow b} f(t) - \lim_{t \rightarrow a} f(t)$$

Propriété 11.42 Soit F une primitive sur un intervalle $[a, b[$ d'une fonction f continue. Alors,

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b,$$

l'intégrale étant convergente *ssi* le crochet admet une limite finie

11.3.5 Intégrales de référence

Propriété 11.43 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge $\iff \alpha > 0$

Algèbre

Dans tout cette partie, le symbole \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

12 Polynômes

Séquence 19

12.1 Forme additive

12.1.1 Généralités

Définition 12.1 Un polynôme (formel) à coefficients dans \mathbb{K} (de l'indeterminée X) est une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres de \mathbb{K} , nulle à partir d'un certain rang n , que l'on note

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

espace L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}[X]$.

Notation 12.2

$$\mathbb{K}[X] := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k : n \geq 0 \text{ et } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\}$$

**fonction
polynôme**

Une fonction polynôme peut être associée à chaque polynôme en substituant une variable à l'indeterminée.

Définition 12.3 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction polynôme ssi il existe $N \in \mathbb{R}$ et a_0, \dots, a_N dans \mathbb{K} tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

– Le nombre $P(x)$ est la valeur (numérique) du polynôme P en x .

Calculer cette valeur revient à substituer x à la place de X dans l'expression de P

Propriété 12.4 La fonction polynôme associée à un polynôme $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ est

la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^N a_k x^k \end{aligned}$$

égalité

Propriété 12.5 Soient P et Q deux polynômes. Alors, $P = Q \iff \forall x \in \mathbb{K}, P(x) = Q(x)$

- Deux polynômes sont égaux *ssi* leurs fonctions polynômes associées sont les mêmes.
- Autrement dit, deux polynômes ayant en tout point de \mathbb{R} ou \mathbb{C} même valeur numérique ont mêmes coefficients.

Les détails techniques subtils de la définition des polynômes formels ne sont pas à connaître. En particulier, on pourra librement les identifier aux fonctions polynomiales. Cependant, pour la suite de ce chapitre, les propriétés seront exprimés dans le formalisme des polynômes (parce que c'est plus naturel), dont le maniement est familier : on les manipule comme les expressions comportant des variables

12.1.2 Opérations algébriques

Dans cette section, P et Q désignent deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K}

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$$

**addition
multiple**

La somme et les multiples (plus généralement les combinaisons linéaires) de polynômes à coefficients dans \mathbb{K} sont des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

Définition 12.6 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(a_k + b_k)}_{c_k} X^k$

Définition 12.7 $\lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(\lambda a_k)}_{c_k} X^k \quad (\lambda \in \mathbb{K})$

Propriété 12.8 $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel

produit

Le produit de polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} .

Définition 12.9 $\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m+n=k} a_m \times b_n \right)}_{c_k} X^k$

algèbre

Propriété 12.10 On calcule avec les polynômes comme avec les nombres réels

- Autrement dit, on calcule avec les polynômes comme on calcule avec les nombres réels en ce qui concerne sommes, multiples et produits. Les propriétés classiques (distributivité, associativité, commutativité, ...) sont valables pour les polynômes.

Identité
algébrique

Propriété 12.11 $P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k} \quad (n \in \mathbb{N})$

– Cette égalité est vraie pour $n = 0$ avec la convention selon laquelle $P^0 = Q^0 = I_n$ et selon laquelle une somme vide est nulle.

Binôme
de Newton

Propriété 12.12 $(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N})$

– Cette égalité est vraie pour $n = 0$ avec la convention selon laquelle $P^0 = Q^0 = 1$ et selon laquelle une somme vide est nulle.

12.1.3 Dérivation

dérivée La dérivée d'un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} est un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} .

Définition 12.13 $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \right)' := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$

somme
multiple
produit

Propriété 12.14 $(P + Q)' = P' + Q'$

Propriété 12.15 $(\lambda \cdot P)' = \lambda \cdot P'$

Propriété 12.16 $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$

– La dérivée d'une combinaison linéaire de polynômes est la combinaison linéaire de leurs dérivées

$$(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)' = \lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'$$

Formule
de Leibniz

Théorème 12.17 $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} \quad (n \in \mathbb{N})$

12.1.4 Substitution

composée La composée de deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} .

Définition 12.18 $Q(P) = Q \circ P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P^k \quad (P \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \text{ dans } \mathbb{K}[X])$

Propriété 12.19 $Q(X) = Q$ ($Q \in \mathbb{K}[X]$)

formules
de Taylor

Théorème 12.20 $P(X + a) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(a) \frac{X^k}{k!}$ ($P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$)

Théorème 12.21 $P(X + a) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(X) \frac{a^k}{k!}$ ($P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$)

- La somme est finie car les dérivées de P sont toutes nulles à partir d'un certain rang.
- Pour les polynômes (uniquement), la variante (beaucoup moins utile) suivante est également satisfaite

$$P(X + a) = \sum_{k \geq 0} P^{(k)}(X) \frac{a^k}{k!}$$

12.1.5 Degré

degré

Définition 12.22 $\deg\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k}_P\right) = \max\{k : a_k \neq 0\}$ ($P \neq 0$)

Convention 12.23 $\deg(0) = -\infty$

Propriété 12.24 $\deg(c) = 0$ ($c \in \mathbb{K}^*$)

- Le degré d'un polynôme non nul est un nombre entier positif.

Propriété 12.25 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$ ($P \neq 0$)

- Pour un polynôme non nul, le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé coefficient du monôme dominant de P

polynôme
unitaire

Définition 12.26 $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ unitaire $\iff \begin{cases} P \neq 0 \\ a_{\deg(P)} = 1 \end{cases}$

somme
multiple
produit
dérivation

Propriété 12.27 $\deg(P + Q) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ si $\deg(P) \neq \deg(Q)$
 $\leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ sinon

Propriété 12.28 $\deg(\lambda P) = \deg(P) \quad (P \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}^*)$

Propriété 12.29 $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q) \quad (P \neq 0, Q \neq 0)$

Propriété 12.30 $\deg(P') = \deg(P) - 1 \quad \text{si } \deg(P) \geq 1$
 $= -\infty \quad \text{sinon}$

espace $\mathbb{K}_n[X]$ L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré inférieur à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition 12.31 $\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg(P) \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 12.32 $P \in \mathbb{K}_n[X] \iff \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} : P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Propriété 12.33 $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$

12.2 Forme multiplicative

12.2.1 Diviseurs

diviseur Un polynôme P est un diviseur de Q ssi Q est un multiple de P .

Définition 12.34 Q divise $P \iff Q|P \iff \exists R \in \mathbb{K}[X], P = Q \times R$

Définition 12.35 P multiple de $Q \iff Q|P \iff Q$ diviseur de P

- Lorsque P est un diviseur de Q , on dit également que P divise Q et l'on note $P|Q$.
- Le polynôme 0 est un multiple de tout polynôme (tous les polynômes divisent 0).

Propriété 12.36 $0|P \iff P = 0$

Propriété 12.37 $Q|P \implies 0 \leq \deg(Q) \leq \deg(P) \quad (P \neq 0)$

division euclidienne

Propriété 12.38 Soient deux polynômes P et $D \neq 0$. Alors, il existe deux polynômes Q et R , uniques, tels que $P = QD + R$ et $\deg(R) < \deg(D)$

Définition 12.39 $P \neq 0$ est réductible dans \mathbb{K} ssi P admet un diviseur $D \in \mathbb{K}[X]$ de degré vérifiant $0 < \deg(D) < \deg(P)$

Dans le cas contraire, P est dit irréductible dans \mathbb{K}

12.2.2 Racines et multiplicités

Dans cette section, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et P désigne un polynôme de $\mathbb{K}[X]$

L'équation algébrique (polynomiale) associée à un polynôme $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ est l'équation $\tilde{P}(x) = 0$, c'est à dire

$$\sum_{0 \leq k \leq N} a_k x^k = 0$$

d'inconnue x variant dans \mathbb{K} .

zéro
racine

Un zéro (ou une racine) d'un polynôme P est une solution de l'équation polynomiale $P(x) = 0$.

Définition 12.40 α racine de P $\left| \begin{array}{l} \iff P(\alpha) = 0 \\ \iff \alpha \text{ zéro de } P \end{array} \right.$

Propriété 12.41 $P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) | P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - \alpha)Q$

multiplicité

Définition 12.42 α est une racine de P de multiplicité n ssi

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(n)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Propriété 12.43 La multiplicité n de z en tant que racine d'un polynôme P est un entier de \mathbb{N} .

Si z est racine de P , $n \geq 1$ et sinon $n = 0$

Propriété 12.44 α racine de multiplicité n de $P \iff P = (X - \alpha)^n$ et $R(\alpha) \neq 0$
 $\iff (X - \alpha)^n | P$ et $(X - \alpha)^{n+1} \nmid P$

– La multiplicité de α en tant que racine de P est le plus grand entier $n \geq 1$ pour lequel il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^n R.$$

C'est aussi le plus grand entier $n \geq 1$ pour lequel on a

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0, \\ P'(\alpha) = 0, \\ \vdots \\ P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Propriété 12.45 Les nombres deux à deux distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des racines de P de multiplicité respective n_1, \dots, n_k ssi $(X - \alpha_1)^{n_1} \dots (X - \alpha_k)^{n_k}$ divise P .

racines et degré

Théorème 12.46 Un polynôme $P \neq 0$ admet au plus $\deg(P)$ racines distinctes

Corollaire 12.47 Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet au moins $n + 1$ racines, alors $P = 0$

théorème de Gauss

Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans \mathbb{C} .

Théorème 12.48 $\deg(P) \geq 1 \implies \exists \alpha \in \mathbb{C} : P(\alpha) = 0$

Corollaire 12.49 P irréductible dans $\mathbb{C} \iff P \in \mathbb{C}_1[X]^*$

12.2.3 Décomposition en produit

Dans cette section, $P = \sum_{k=0}^n c_k X^k$ désigne un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients dans \mathbb{K} , dont les racines complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ admettent respectivement les multiplicités n_1, \dots, n_p .

décomposition

Théorème 12.50 $\exists (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, P = c_n \prod_{1 \leq k \leq n} (X - z_k)$

– Les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont uniques (à une permutation près). Ce sont les racines de P

Théorème 12.51 $P = c_n \prod_{1 \leq k \leq p} (X - \alpha_k)^{n_k}$
Cette décomposition est unique à permutation des racines près

– Cette identité constitue la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles.

– Un polynôme de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines dans \mathbb{C} , pas forcément distinctes.

Propriété 12.52 $n_1 + \dots + n_p = n$

Corollaire 12.53 Un polynôme non nul admet autant de racines complexes, comptées avec multiplicité, que son degré

relations coefficients-racines

Propriété 12.54 Les racines de $X^2 - sX + p$ sont z et z' ssi

$$\begin{cases} s = z + z' \\ p = zz' \end{cases}$$

– On obtient ces relations en développant l'identité

$$X^2 - sX + p = (X - s)(X - z)$$

et en identifiant les coefficients des monômes X^0 et X^1 .

Décomposition des polynômes réels

Pour la suite de cette section P désigne un polynôme à coefficients réels

polynômes réels

Propriété 12.55 α racine de $P \iff \bar{\alpha}$ racine de P

Corollaire 12.56 Les racines complexes de P sont conjuguées. (*en particulier, on peut rassembler les racines de P qui ne sont pas réelles par paires*)

Corollaire 12.57 P irréductible dans $\mathbb{R} \iff (P \in \mathbb{R}_1[X]^*$ ou P trinôme de discriminant $\Delta < 0$)

Propriété 12.58 Deux racines complexes conjuguées de P ont la même multiplicité.

– On obtient un polynôme réel en couplant les racines conjuguées, en effet

$$(X - \alpha)^n (X - \bar{\alpha})^n = [(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})]^n = [X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2]^n$$

Si $\alpha \notin \mathbb{R}$, on remarque de plus que $\Delta = 4\Re(\alpha)^2 - 4|\alpha|^2 < 0$.

Propriété 12.59 Un polynôme réel $P = \sum_{k=0}^n c_k X^k$ de degré $n \geq 1$ se décompose de manière unique sous la forme

$$P = c_n \prod_{\ell=1}^p (X - \beta_\ell)^{n_\ell} \times \prod_{\ell=1}^q (X^2 + a_\ell X + b_\ell)^{m_\ell}$$

où les β_1, \dots, β_p sont des racines réelles de P et où le discriminant du trinôme réel $X^2 + a_\ell X + b_\ell$ est strictement négatif (il ne possède donc que des racines complexes irréelles conjuguées) et où

$$n = \sum_{1 \leq \ell \leq p} n_\ell + 2 \sum_{1 \leq \ell \leq q} m_\ell$$

racines n^{ième}
de l'unité

Propriété 12.60 $X^n - 1 = \prod_{k=1}^n (X - e^{2\pi ik/n}) \quad (n \geq 1)$

13 Systèmes linéaires

Séquence 9

programme *Tout développement théorique est hors programme.*

- Définition d'un système linéaire.
- Système homogène. Système de Cramer.
- Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ avec $i \neq j$, $L_i \leftarrow aL_i$ avec $a \neq 0$, $L_j \leftrightarrow L_i$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ ($a \neq 0, i \neq j$).
- Écriture matricielle d'un système linéaire.
- Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.
- Inversibilité des matrices triangulaires, diagonales.

- Les outils de ce chapitre font parti des bases importantes, ils sont utilisés en concours pour :
- Reconnaître le type d'une suite et identifier ses éléments caractéristiques
- Trouver une formule pour u_n
- Utiliser la somme des termes d'une suite au cours d'un calcul complexe.

Utilisation en ds/concours : fréquente.

13.1 Systèmes linéaires

Dans ce chapitre, m et n désignent des entiers, a_i , b_i et $a_{i,j}$ désignent des constantes de \mathbb{K} et x_i désignent des variables qui prennent des valeurs dans \mathbb{K}

équation linéaire
second membre

Une équation linéaire de n variables x_1, \dots, x_n avec second membre est une équation du type

Définition 13.1 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

L'équation est dite « homogène » ou « sans second membre » lorsque $b = 0$. Dans le cas contraire, elle est dite « avec second membre ».

système

Un système linéaire est un système constitué d'équations linéaires.

Définition 13.2 (S)
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Le système est dit « homogène » ou « sans second membre » lorsque toutes ses équations sont sans second membre. Il est dit « avec second membre » dans le cas contraire.

- Le système homogène associé à (S) est le système

$$(H) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots = \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Définition 13.3 Un système linéaire est de Cramer *ssi* il a une unique solution

Un système linéaire est dit « carré » lorsqu'il possède autant d'équations que d'inconnues ($m = n$) et « rectangulaire » dans le cas contraire ($m \neq n$).

Un système linéaire carré est dit « triangulaire supérieur » lorsque ses coefficients en dessous de la diagonale principale (les $a_{i,j}$ pour $i > j$) sont nuls.

– On dit aussi qu'un système rectangulaire est triangulaire supérieur lorsque les coefficients du carré supérieur gauche en dessous de la diagonale principale sont tous nuls.

– La notion de système triangulaire inférieur existe aussi, mais traditionnellement, on travaille plutôt avec des systèmes triangulaires supérieurs

– Un système triangulaire supérieur se résoud relativement facilement, par réinjection dans les lignes supérieures.

Un système linéaire carré est dit « diagonal » lorsque ses coefficients en dehors de la diagonale principale (les $a_{i,j}$ pour $i \neq j$) sont nuls.

– Un système diagonal est trivial à résoudre.

– On dit aussi qu'un système rectangulaire est diagonal lorsque les coefficients du carré supérieur gauche en dehors de la diagonale principale sont tous nuls.

Deux systèmes sont dits équivalents *ssi* ils ont les même solutions.

Définition 13.4 Deux systèmes sont équivalents *ssi* ils ont les même solutions.

▷ Simplification de systèmes

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

13.2 Opérations élémentaires

En intervertissant deux lignes (opération élémentaire $L_i \longleftrightarrow L_j$), on transforme un système d'équations linéaires en système équivalent.

Propriété 13.5
$$\begin{cases} \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \end{cases} \iff \begin{cases} \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \end{cases}$$

système
de Cramer

système carré
rectangulaire

système tri-
angulaire

système diagonal

systèmes
équivalents

Echange
de lignes

– Souvent, il n'est pas nécessaire d'invertir les lignes

▷ Système « diagonale » ou « triangulaire » :

$$\begin{cases} 2y = 6 \\ 3x = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 9 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

Multiple de ligne En multipliant une ligne par un nombre non nul (opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$), on transforme un système d'équations linéaires en système équivalent.

Propriété 13.6 $\begin{cases} \dots \\ L_i \\ \dots \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ \lambda L_i \\ \dots \end{cases} \quad (\lambda \neq 0)$

▷ Simplification de ligne :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Combinaison linéaire de lignes En ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes (opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$), on transforme un système d'équations linéaires en système équivalent.

Propriété 13.7 $\begin{cases} \dots \\ L_i \\ \dots \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j \\ \dots \end{cases} \quad (\lambda_j \in \mathbb{K})$

▷ Pivot : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{cases} \boxed{x} - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Pivot (sans division) Pour éviter un pivot de Gauss sans effectuer de division, il est utile d'avoir recours à l'opération suivante

Corollaire 13.8 $\begin{cases} \dots \\ L_i \\ \dots \\ L_j \\ \dots \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ aL_i + bL_j \\ \dots \\ L_j \\ \dots \end{cases} \quad (a \neq 0, b \in \mathbb{K})$

▷ Pivot : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{cases} \boxed{x} - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

suite d'opérations En effectuant plusieurs opérations élémentaires, on transforme un système linéaire en système équivalent à condition de les effectuer successivement (en série).
 – On évitera d'effectuer plusieurs opérations élémentaires simultanément (en parallèle) car cela ne transforme pas forcément un système linéaire en système équivalent.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \not\iff \begin{cases} 5x - 2y = 15 \\ 5x - 2y = 15 \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}$$

– Lorsque le résultat de plusieurs opérations élémentaires ne dépend pas de l'ordre dans lequel elles sont effectuées (prendre le temps de le vérifier), on pourra les effectuer en parallèle.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/3 \end{array}$$

substitution En isolant dans une ligne une variable que l'on substitue dans les autres lignes, on transforme un système d'équations linéaires en système équivalent.
 – Cette opération n'est pas élémentaire mais revient à effectuer plusieurs opérations élémentaires
 – La substitution est déconseillée parce qu'elle conduit plus facilement à des erreurs qui, par effet boule de neige, sont le plus souvent catastrophiques et difficilement corrigibles

13.3 Résolution

résolution Pour résoudre un système linéaire, on lui applique successivement des transformations pour le simplifier et obtenir un système équivalent triangulaire ou diagonal.

réduction par substitution Pour résoudre le système, on procède par substitutions en diminuant progressivement le nombre de variables.
 – Ceux qui utilisent cette technique de résolution sont con-damnés à commettre des erreurs.

méthode de Gauss La méthode de Gauss consiste à résoudre le système, en procédant par pivots pour éliminer des variables et rendre le système soit diagonal *recommandé*, soit triangulaire.
 – Il est recommandé d'utiliser cette technique de résolution : les calculs sont simples, rapides, compréhensibles et moins sujets aux erreurs, qui sont elles mêmes, faciles à trouver et à corriger.

Méthode 13.9 (Méthode de Gauss)

1. choisir un pivot non nul (*de préférence un petit nombre entier*)
2. Effectuer l'opération $L_i \leftarrow aL_i - bL_{\text{pivot}}$ pour éliminer les variables sur la colonne du pivot
 - a. Factoriser et simplifier les lignes au besoin
 - b. Enlever les lignes $0 = 0$ (*dédupliquer les lignes identiques*)
 - c. En cas de ligne $0 \neq 0$ (*ou de relations incompatibles*), le système n'a pas de solution.
3. Recommencer en choisissant un pivot sur une autre ligne et une autre colonne
4. Lorsque le système est diagonal, faire passer les variables supplémentaires à droite de l'égalité

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \boxed{x} - y - z = 1 \\ x + y + 3z = 7 \\ x + 3y + z = 7 \end{cases} &\iff \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2y + 4z = 6 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} - y - z = 1 \\ \boxed{y} + 2z = 3 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \begin{cases} x + z = 4 \\ y + 2z = 3 \\ -3z = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} + z = 4 \\ \boxed{y} + 2z = 3 \\ \boxed{z} = 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{cases} \begin{cases} \boxed{x} = 3 \\ \boxed{y} = 1 \\ \boxed{z} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

itions des sys-
es homogènes

Théorème 13.10 Un système linéaire homogène a $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit la solution nulle} \\ \text{soit une infinité de solutions} \end{array} \right.$

structure
des solutions

La solution générale d'un système linéaire S est la somme d'une de ses solutions particulières et de la solution générale du système linéaire homogène (H) associé.

Théorème 13.11 Soit x_0 une solution particulière de S , de système homogène associé H . Alors,

$$x \text{ solution de } S \iff x - x_0 \text{ solution de } H$$

– Lorsqu'un système linéaire admet une infinité de solutions, il est possible d'exprimer une partie des variables en fonctions des autres, qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles.

$$x + y = 1 \iff x = 1 - y \quad (y \in \mathbb{R}) \iff y = 1 - x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

itions des sys-
èmes linéaires

Corollaire 13.12 Un système linéaire a $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit aucune solution} \\ \text{soit une unique solution} \\ \text{soit une infinité de solutions} \end{array} \right.$

14 Matrices

Séquence 13

programme

- Matrices rectangulaire
 - Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} .
 - Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 - Produit matriciel.
 - Transposée d'une matrice et transposition d'un produit, *Notation* ${}^t A$.
 - Addition, multiplication par un scalaire. *On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B .*

- Cas des matrices carrées
 - Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} .
 - Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques.
 - Matrices inversibles, inverse d'une matrice. *On admettra que pour une matrice carrée, uninverse à gauche ou à droite est l'inverse.*
 - Ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
 - Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse.
 - Formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.

- Les outils de ce chapitre font parti des bases importantes, ils sont utilisés en concours pour :
- Reconnaître le type d'une suite et identifier ses éléments caractéristiques
- Trouver une formule pour u_n
- Utiliser la somme des termes d'une suite au cours d'un calcul complexe.

Utilisation en ds/concours : fréquente.

14.1 Matrices

matrice

Définition 14.1 Une matrice à p lignes et q colonnes d'éléments de \mathbb{K} est un tableau de pn nombres de \mathbb{K}

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,q} \end{array} \right)}_{q \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{array}{c} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{array}} \right\} p \text{ lignes}$$

- Les matrices à p lignes et *une* colonne sont appelées matrices colonnes ou vecteurs colonnes à n lignes/composants.
- Les matrices à n lignes et n colonnes sont appelées matrices carrées de taille n .
- Les matrices à une ligne et q colonnes sont appelées matrices lignes
- Une matrice est dite carrée si elle a autant de colonnes que de lignes
- La taille d'une matrice carrée est son nombre de colonnes et de lignes

espace des matrices

L'ensemble des matrices, à p lignes et q colonnes, d'éléments de \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Définition 14.2 $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) := \{A : \text{matrice à } p \text{ lignes et } q \text{ colonnes d'éléments de } \mathbb{K}\}$

- Par convention, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

matrice nulle

La matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice, notée 0 , dont tous les coefficients sont nuls.

Notation 14.3 $0 = (0)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} = \underbrace{\left(\quad \quad \quad \right)}_{\text{non standard}}$

- Une manière alternative (et plus officielle) de représenter la matrice nulle est

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

matrice unité identité

La matrice unité (ou identité) de taille n est la matrice carré de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1 sur la diagonale principale et 0 ailleurs.

Notation 14.4 $I_n := \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} \right)}_{n \text{ colonnes}} \Bigg\} n \text{ lignes} \quad (n \geq 1)$

- Une manière alternative (et plus officielle) de représenter la matrice identité est

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.2 Opérations

Dans cette section n , p et q désignent des entiers strictement positifs et A et B désignent des matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

14.2.1 Sommes

somme La somme de deux matrices est la matrice de la somme de leurs coefficients.

Définition 14.5 $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} + (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} := (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

– La matrice $A + B$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,q} + b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{i,j} + b_{i,j} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} + b_{p,1} & \dots & a_{p,q} + b_{p,q} \end{pmatrix}$$

14.2.2 Multiples

multiple Le produit d'un nombre et d'une matrice est la matrice obtenue en multipliant chacun de ses coefficients par le nombre.

Définition 14.6 $\lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} := (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

– La matrice $\lambda \cdot A$ est la matrice

$$\lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \lambda a_{i,j} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{p,1} & \dots & \lambda a_{p,q} \end{pmatrix}$$

14.2.3 Produits

produit

Définition 14.7 Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Alors, $A \times B := \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_{i,k} b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

- Pour que le produit de A par B soit possible, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .
- Le produit $A \times B$ a autant de lignes que A et de colonnes que B .
- pour effectuer rapidement un produit de matrices, la construction mentale suivante est recommandée :

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rightarrow \text{Ligne } i \rightarrow & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \vdots & \vdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \vdots & \vdots & b_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n,1} & \vdots & \vdots & b_{n,q} \end{pmatrix}$$

Colonne j
↓

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \vdots & \vdots & c_{1,k} \\ \dots & & & \dots \\ \dots & c_{i,j} & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ c_{m,1} & \vdots & \vdots & c_{m,k} \end{pmatrix}$$

- Attention : le produit matriciel n'est pas commutatif

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0) = (0 \ 1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans la suite de cette section, les lettres A , B et C désignent des matrices dont les dimensions rendent possibles les opérations considérées.

associativité

Théorème 14.8 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) =: A \times B \times C$

bilinéarité

Propriété 14.9 $\begin{aligned} (\lambda A + \mu B)C &= \lambda AC + \mu BC \\ C(\lambda A + \mu B) &= \lambda CA + \mu CB \end{aligned} \quad (\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K})$

scalaire
mobile

Propriété 14.10 $(\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \times B) \quad (\lambda \in \mathbb{K})$

élément neutre
à gauche
à droite
aux deux

Propriété 14.11 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $I_p \times A = A$ et $A \times I_q = A$

- La matrice I_n est un élément neutre (à droite et à gauche) pour \times dans l'ensemble des matrices carrées de taille n

$$I_n \times A = A \times I_n = A \quad (A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$$

14.2.4 Transposition

Dans cette section, les lettres p et q désignent des entiers strictement positifs et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ désigne une matrice.

transposition

Définition 14.12 ${}^t A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}$

– La transposée de la matrice

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,q} \end{array} \right)}_{q \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} p \text{ lignes}$$

est la matrice obtenue par symétrie de la matrice A par rapport à sa diagonale principale

$${}^t A := (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{p,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{p,2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1,q} & a_{2,q} & \cdots & a_{p,q} \end{array} \right)}_{p \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} q \text{ lignes}$$

– Les lignes L_1, \dots, L_p de A deviennent les colonnes C'_1, \dots, C'_p de ${}^t A$.

– Les colonnes C_1, \dots, C_q de A deviennent les lignes L'_1, \dots, L'_q de ${}^t A$.

– La transposée d'une matrice $n \times p$ est une matrice $q \times p$. En particulier, la transposée d'une matrice carrée de taille n est une matrice carrée de taille n .

lien Une matrice est triangulaire supérieure *ssi* sa transposée est triangulaire inférieure.

Propriété 14.13 A triangulaire supérieure $\iff {}^t A$ triangulaire inférieure

Dans la suite de cette section, les lettres A et B désignent des matrices dont les dimensions rendent possibles les opérations considérées.

involutions
linéarité
produit

Propriété 14.14 ${}^t ({}^t A) = A$

Propriété 14.15 ${}^t (\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B \quad (\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K})$

Propriété 14.16 ${}^t (AB) = {}^t B {}^t A$

14.2.5 Inverse

Dans cette section, A et B désignent des matrices carrées de taille n .

inverse

Définition 14.17 B inverse de $A \iff A \times B = B \times A = I_n$

Propriété 14.18 Lorsqu'il existe, l'inverse d'une matrice A est unique et est noté A^{-1}

- Une matrice A est inversible *ssi* elle admet un inverse
- Si A et B vérifient cette relation, alors A et B sont nécessairement carrées, de taille n
- Une matrice carrée A est inversible *ssi* $AX \neq 0$ pour chaque vecteur colonne $X \neq 0$.

inversibilité

Définition 14.19 A est inversible *ssi* il existe une matrice B inverse de A

Dans la suite de cette section, A et B désignent des matrices inversibles de même taille.

produit
transposée

Propriété 14.20 $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Propriété 14.21 ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

- Attention à ne pas se tromper dans l'ordre du produit

14.2.6 Rang

rang

A chaque matrice A , on peut associer un nombre entier unique $\text{rg}(A)$, appelé rang de A

Définition 14.22 Soient C_1, \dots, C_q les colonnes d'une matrice A . Alors, $\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_q)$

Propriété 14.23 $\text{rg}(A) = r \iff \exists P, Q$ inversibles telles que $A = P \times \begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix} \times Q$

- Le rang r d'une matrice $n \times p$ vérifie

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq n \\ 0 \leq r \leq p \end{cases}$$

En particulier, on a $0 \leq r \leq \min(n, p)$.

transposée Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Propriété 14.24 Soit A matrice, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$

– A fortiori, le rang d'une matrice est aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes.

multiplication On ne change pas le rang en multipliant une matrice par une matrice inversible.

Propriété 14.25 $\text{rg}(A) = \begin{cases} \text{rg}(A \times B) \\ \text{rg}(B \times A) \end{cases} \quad (B \text{ inversible})$

– Les opérations élémentaires ne changent pas le rang d'une matrice. En effet, les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) reviennent à multiplier la matrice à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible.

**matrice nulle
inverse**

Propriété 14.26 $A = 0 \iff \text{rg}(A) = 0$

Propriété 14.27 $A \text{ inversible} \iff A \text{ carrée et } \text{rg}(A) = \text{taille}(A)$

14.3 Matrices carrées

Dans cette section, les lettres A, B et C désignent des matrices carrées de même taille.

14.3.1 † Trace

trace La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients sur la diagonale principale.

Définition 14.28

$$\text{Tr}(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} := \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}$$

– La trace d'une matrice à coefficients dans \mathbb{K} est un nombre de \mathbb{K} .

**linéarité
produit**

Propriété 14.29 $\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr} A + \mu \text{Tr} B \quad (\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K})$

Propriété 14.30 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

14.3.2 Matrices diagonales

matrice diagonale Une matrice carrée est dite diagonale si ses coefficients en dehors de sa diagonale principale sont tous nuls

Définition 14.31 A **diagonale** $\iff A = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \iff a_{i,j} = 0 \quad (i \neq j)$

matrice diagonale Les multiples, les sommes et les produits de matrices diagonales sont des matrices diagonales.

Propriété 14.32 Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, A, B diagonales.

$$\left. \begin{array}{l} \lambda A + \mu B \\ AB \end{array} \right\} \text{ sont diagonales}$$

inverse diagonal Une matrice diagonale est inversible si, et seulement si, ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Propriété 14.33

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \text{ inversible} \iff \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \vdots \\ \gamma \neq 0 \end{cases}$$

– L'inverse d'une matrice diagonale est une matrice diagonale. En particulier, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$$

14.3.3 Matrices triangulaires supérieures

matrice triangulaire Une matrice carrée est dite triangulaire supérieure si ses coefficients en dessous de sa diagonale principale sont tous nuls

A triangulaire supérieure $\iff a_{i,j} = 0 \quad (i > j)$

Définition 14.34

$$\iff A = \begin{pmatrix} & & \cdots \\ \cdot & & \cdots \\ & \cdot & \cdots \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

– Une matrice carrée est dite triangulaire inférieure si ses coefficients en dessous de sa diagonale principale sont tous nuls

$$(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ triangulaire inférieure} \iff (i < j \implies a_{i,j} = 0)$$

matrice triangulaire

Les multiples, sommes et produits de matrices triangulaires supérieures sont des matrices triangulaires supérieures.

Propriété 14.35 Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, A, B triang. sup..

$$\left. \begin{array}{l} \lambda A + \mu B \\ AB \end{array} \right\} \text{ sont triang. sup.}$$

– Si A est triangulaire supérieure et inversible alors A^{-1} est triangulaire supérieure.

inverse triangulaire

Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Propriété 14.36 $\begin{pmatrix} \alpha & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \cdots \\ & & \gamma \end{pmatrix}$ inversible $\iff \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \vdots \\ \gamma \neq 0 \end{cases}$

– L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure

– L'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire inférieure

14.3.4 Matrices symétriques

matrice symétrique

Une matrice carrée est symétrique *ssi* elle est égale à sa transposée.

Définition 14.37 A symétrique $\iff {}^t A = A$

– Une matrice est symétrique *ssi* elle est symétrique par rapport à sa diagonale principale. Autrement dit, *ssi* ses coefficients de part et d'autre de la diagonale principale sont égaux

14.3.5 Matrices anti-symétriques

matrice anti-symétrique

Une matrice carrée est anti-symétrique *ssi* elle est égale à l'opposée de sa transposée.

Définition 14.38 A anti-symétrique $\iff {}^t A = -A$

– Une matrice est anti-symétrique *ssi* ses coefficients sur la diagonale principale sont nuls et ses coefficients de part et d'autre de la diagonale principale sont opposés.

14.3.6 Matrices qui commutent

commuter

Définition 14.39 A et B commutent $\iff AB = BA$

– Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice λI_n commute avec toutes les matrices carrées de taille n .

Identité algébrique

L'identité algébrique suivante est satisfait par des matrices qui commutent

Propriété 14.40 Soient $n \in \mathbb{N}$ et A et B des matrices carrées **qui commutent**.

Alors, $A^n - B^n = (A - B) \sum_{k+\ell=n-1} A^k B^\ell$

– Cette égalité est vraie pour $n = 0$ avec la convention selon laquelle $A^0 = B^0 = I_n$ et selon laquelle une somme vide est nulle.

Binôme de Newton

Le binôme de Newton est satisfait par des matrices qui commutent

Propriété 14.41 Soient A, B matrices carrées avec $AB = BA$, $n \in \mathbb{N}$.

$$(A + B)^n = \sum_{k+\ell=n} \binom{n}{k} A^k B^\ell$$

– Cette égalité est vraie pour $n = 0$ avec la convention selon laquelle $A^0 = B^0 = I_n$ et selon laquelle une somme vide est nulle.

14.4 Matrices et systèmes linéaires

lien entre systèmes et matrices

Définition 14.42 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ et X et B dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, $AX = B$

$$B \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 & \cdots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & \cdots & +a_{n,p}x_p & = & b_p \end{cases}$$

– Les matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ $X := (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $B := (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont dites associées au système linéaire.

– Le système linéaire est homogène *ssi* B est la matrice nulle.

système
de Cramer

$$AX = 0 \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 & \cdots & +a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & \cdots & +a_{n,p}x_p & = & 0 \end{cases}$$

Propriété 14.43 $AX = B \iff X = A^{-1}B$ (A inversible)

- Un système linéaire est de Cramer *ssi* il admet une unique solution.
- Un système $n \times p$ est de Cramer *ssi* $n = p = r$ où r est le rang du système.
- On peut utiliser cette relation pour inverser une matrice inversible

14.5 Rang d'une matrice

Dans cette section, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

14.5.1 Généralités

Soient n et p deux nombres entiers strictement positifs. Alors, le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille constituée par ses colonnes C_1, \dots, C_p dans l'espace vectoriel des colonnes à n lignes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est à dire la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Définition 14.44 $\text{Rg}(M) = \text{Rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$

Propriété 14.45 M est inversible $\iff \text{rg}(M) = n$ ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

Propriété 14.46 Le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ne change pas si on la multiplie par une matrice carrée inversible.

Théorème 14.47 Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée

Propriété 14.48 $0 \leq \text{rg}(M) \leq \min(n,p)$ ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

Propriété 14.49 Une matrice, qui contient une sous-matrice de rang r , est au moins de rang r

Propriété 14.50 Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ est de rang r *ssi* il existe $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{G}l_p(\mathbb{K})$ tels que $P \times M \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- pour calculer le rang d'une matrice M , on peut la transformer à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes ET les colonnes afin d'obtenir une matrice du type J_r . Le rang de la matrice est alors le nombre entier r obtenu pour la matrice de type J_r .

15 Espaces vectoriels

Séquence 10

- programme** Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur \mathbb{K} avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- Structure d'espace vectoriel.
 - Sous-espaces vectoriels. *Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces \mathbb{K}^n , espaces de polynômes, espaces de matrices), de l'analyse (espaces de suites, de fonctions).*
 - Combinaisons linéaires.
 - Sous-espace engendré. *On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.*
Une famille finie d'un espace vectoriel E est la donnée d'une liste finie (x_1, \dots, x_n) de vecteurs de E . Le cardinal de cette famille est n .
 - Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base. *On se limitera à des familles et des bases de cardinal fini. Exemple de la base canonique de \mathbb{K}^n .*

15.1 Espaces vectoriels

15.1.1 Loi interne

Dans toute cette section, E désigne un ensemble non vide et $*$ désigne une loi interne de E , c'est-à-dire une application $f : E \times E \rightarrow E$ dont le résultat est noté $x * y = f(x, y)$

loi interne

Définition 15.1 $*$ loi interne de $E \iff x * y \in E \quad (x \in E, y \in E)$

– Autrement dit, le nombre $x * y$ existe et appartient à E quels que soient $x, y \in E$.

commutativité

Définition 15.2 $*$ loi commutative $\iff x * y = y * x \quad (x \in E, y \in E)$

– Le résultat du calcul ne dépend pas de l'ordre (spatial) dans lequel il est effectué : le résultat est le même si l'on échange de place x et y .

associativité

Définition 15.3 $*$ loi associative $\iff (x * y) * z = x * (y * z) \quad (x \in E, y \in E, z \in E)$

– Le résultat du calcul ne dépend pas de l'ordre (temporel) dans lequel il est effectué

élément neutre

Définition 15.4 e neutre pour $*$ $\iff e \in E$ et $x * e = x = e * x$ ($x \in E$)

- Multiplier à gauche ou à droite par un élément neutre ne change rien.

Propriété 15.5 Une loi interne admet au plus un élément neutre.

- La multiplication admet 1 comme élément neutre dans \mathbb{N} mais n'en admet aucun dans $2\mathbb{N}$.
- 0 est l'élément neutre pour l'addition dans \mathbb{C} .
- 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans \mathbb{C} .

inversabilité

Définition 15.6 Soit $*$ une loi interne de E admettant un élément neutre e . Alors,
 x inverse de y pour $*$ $\iff x * y = e = y * x$

Propriété 15.7 Il existe au plus un inverse d'un élément

- Multiplier à gauche ou à droite par l'inverse donne l'élément neutre.
- Un élément x de E est inversible pour $*$ ssi x admet un inverse dans E pour $*$
- On utilise le mot « opposé » de préférence à « inverse » pour l'addition

15.1.2 Loi externe

Dans cette section, $+$ désigne une loi interne d'un ensemble non vide E et \cdot désigne une loi externe de E selon le corps des scalaires \mathbb{K} , une application $f : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ dont le résultat est noté $\lambda \cdot x = f(\lambda, x)$

loi externe

Définition 15.8 \cdot loi externe de E $\iff \lambda \cdot x \in E$ ($\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$)

- Autrement dit, le nombre $\lambda \cdot x$ existe et appartient à E quels que soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

associativité

Définition 15.9 \cdot loi associative $\iff (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ ($\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}, x \in E$)

- Le résultat du calcul ne dépend pas de l'ordre (temporel) dans lequel il est effectué

distributivité

Définition 15.10

$$\cdot \text{ distributive sur } + \iff \begin{cases} (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x & (\lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}, x \in E) \\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y & (\lambda \in \mathbb{K}, x \in E, y \in E) \end{cases}$$

15.1.3 Espace vectoriel

espace vectoriel

Définition 15.11 Soient $+$, \cdot lois de E .

$$(E, +, \cdot) \text{ } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel} \iff \left\{ \begin{array}{l} + \text{ loi interne, associative, commutative,} \\ \text{admettant un élément neutre noté } 0, \\ \text{tous les } x \in E \text{ sont inversibles pour } + \\ \cdot \text{ loi externe, associative, distributive sur } + \\ \forall x \in E, 1 \cdot x = x \end{array} \right.$$

- Un tel ensemble sera également appelé un « espace vectoriel sur \mathbb{K} ».
- Pour simplifier, un espace vectoriel est un ensemble E plutôt sympathique dont on peut ajouter les éléments ou en prendre des multiples.
- Un espace vectoriel sur \mathbb{C} est également un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
- Un espace vectoriel contient au moins un élément : l'élément neutre 0_E .
- Pour simplifier les notations, on écrira λx à la place de $\lambda \cdot x$.

espace \mathbb{K}^n L'ensemble \mathbb{K}^n muni des lois usuelles $+$ et \cdot définies par

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) & := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) & := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{array} \right.$$

forme un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Propriété 15.12 Pour $n \geq 1$, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel

espace de
fonctions

Propriété 15.13 Soient A un ensemble non vide et F un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors, L'ensemble $\mathcal{F}(A, F)$ muni des lois $+$ et \cdot définies pour f et g dans $\mathcal{F}(A, F)$ par

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) & (x \in A) \\ (\lambda \cdot f)(x) &= \lambda \cdot f(x) & (\lambda \in \mathbb{K}, x \in A) \end{aligned}$$

forme un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Corollaire 15.14 L'ensemble de fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni des opérations $+$ et \cdot usuelles, forme un \mathbb{R} -espace vectoriel

espace des suites

Corollaire 15.15 L'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, muni des lois $+$ et \cdot usuelles, forme un \mathbb{R} -espace vectoriel

Dans la suite de cette section $(E, +, \cdot)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel

vecteur
scalaire

Définition 15.16 x vecteur $\iff x \in E$
 λ scalaire $\iff \lambda \in \mathbb{K}$

multiple nul

Le produit d'un scalaire par un vecteur est nul si, et seulement si le scalaire est nul ou le vecteur est nul.

Propriété 15.17 $\lambda \cdot x = 0 \iff \lambda = 0$ ou $x = 0$

Combinaisons linéaires

Définition 15.18 x combi. linéaire de $x_1, \dots, x_n \in E$
pour les coeffs $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \iff x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$

– Les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réalisant cette décomposition de x sur les x_1, \dots, x_n ne sont pas nécessairement uniques.

– Un \mathbb{K} -espace vectoriel est stable par combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{K}

$$x_1, \dots, x_n \in E \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \implies \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in E$$

15.2 Sous-espaces vectoriels

15.2.1 Généralités

Dans toute cette section, $(E, +, \cdot)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel

sous-espace
vectoriel

Un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel F inclus dans E tels que les lois de F soient la restriction à F des lois de E .

Définition 15.19 $F(+, \cdot)$ SEV de $E \iff \begin{cases} F \subset E \\ F(+, \cdot) \mathbb{K}\text{-EV} \end{cases}$

– pour simplifier, un sous-espace vectoriel F de E est un espace vectoriel plus petit que E (au sens de l'inclusion), muni des mêmes lois.

– Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors $\{0\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E .

Propriété 15.20 Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $0_E = 0_F$

caractérisation

Propriété 15.21 Soit E \mathbb{K} -espace vectoriel.

$$F \text{ SEV de } E \iff \begin{cases} F \subset E \\ F \neq \emptyset \\ F \text{ stable par combi. linéaires} \end{cases}$$

– Autrement dit, F forme un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E $F \neq \emptyset$, $F \subset E$ et

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda.x + \mu.y \in F,$$

c'est-à-dire stable par addition et par la multiplication extérieure

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in F^2, & x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, & \lambda.x \in F \end{cases}$$

Méthode 15.22 (Pour montrer que F est un \mathbb{K} -espace vectoriel)

1. Montrer que $F \subset E$, pour un \mathbb{K} -espace vectoriel de référence E
2. Montrer que $F \neq \emptyset$. Pour cela, il est conseillé de montrer que $0_E \in F$
3. Montrer que F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$$

intersection Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

Propriété 15.23 $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un SEV de E $((F_i)_{i \in I}$ des SEV de E)

15.2.2 Espaces vectoriels engendrés

Dans cette section, $(E, +, \cdot)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel et A désigne une partie non vide de E

espace engendré Le (sous-) espace vectoriel (de E) engendré par une partie $A \subset E$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant A .

Définition 15.24 $\text{Vect}(A) := \bigcap_{A \subset F \text{ sev de } E} F$ ($A \subset E$)

caractérisation

Propriété 15.25

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : n \geq 1, x_1 \in A, \dots, x_n \in A, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \quad (A \subset E)$$

– Le sous espace vectoriel engendré par une partie A est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{K} qu'il est possible de former avec les éléments de A .

famille finie

Corollaire 15.26

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \quad (n \geq 1 \text{ et } (x_1, \dots, x_n) \in E^n)$$

15.2.3 Familles de vecteurs

Dans cette section, $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ désigne une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E

famille génératrice

Une famille de vecteurs de E est génératrice *ssi* son espace vectoriel engendré est E

Définition 15.27 \mathcal{F} engendre $E \iff E = \text{Vect}(\mathcal{F})$

– Une famille \mathcal{F} est génératrice si l'on peut fabriquer tous les vecteurs de l'espace avec des combinaisons linéaires de ses éléments

$$\mathcal{F} \text{ engendre } E \iff \forall x \in E, \exists n \geq 1, \exists (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{F}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Pour une famille finie, on peut écrire plus simplement

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ engendre } E \iff \forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

<exemple>La famille constitué des vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ engendrent \mathbb{R}^3 . </exemple>

– Si (x_1, \dots, x_n) engendre E , on peut écrire tout vecteur x de E comme une combinaison linéaire des éléments de cette famille

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

famille libre

Une famille de vecteurs est libre *ssi* il existe une seule combinaison linéaire nulle de ces vecteurs (celle dont tous les coefficients sont nuls).

Définition 15.28 (x_1, \dots, x_n) libre $\iff \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$

– On dit également que la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est linéairement indépendante dans E .

– Une famille infinie de vecteur est libre *ssi* chacune de ses sous-familles finie de vecteurs est libre.

– Si (x_1, \dots, x_n) est libre, on peut identifier les coefficients :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \implies \forall i \in [1, n] \lambda_i = \mu_i$$

famille liée

Définition 15.29 (x_1, x_2, \dots, x_n) liée \iff (x_1, x_2, \dots, x_n) non libre $\vee \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$

– On dit également que la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est linéairement dépendante ou qu'elle admet une relation de dépendance linéaire.

base

Définition 15.30 \mathcal{F} base de $E \iff \mathcal{F}$ est libre et génératrice dans E

- Les bases d'un espace vectoriel E sont les familles libres et génératrices de E
- Autrement dit, on a

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \iff \forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

Les nombres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont appelés coordonnées (ou composantes) du vecteur x dans la base (e_1, \dots, e_n) .

– L'espace vectoriel \mathbb{K}^n est muni d'une base "canonique" (qui s'introduit naturellement) : la famille (e_1, \dots, e_n) constituée des vecteurs

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad e_i := (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0).$$

15.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Séquence 20 et 21

programme

- Espaces admettant une famille génératrice finie.
- Existence de bases
- Si L est libre et si G est génératrice, le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G .
- Dimension d'un espace vectoriel. *Notation* $\dim(E)$
- Caractérisation des bases. *Dans un espace vectoriel de dimension n , une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.*
- Rang d'une famille finie de vecteurs.
- Théorème de la base incomplète.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel. *Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.*

15.3.1 Dimension

Dans cette section, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel

dimension finie

Définition 15.31 E de dimension finie $\iff E$ contient une famille génératrice finie

inégalité

Propriété 15.32 $\left. \begin{array}{l} (e_1, \dots, e_m) \text{ libre dans } E \\ (f_1, \dots, f_n) \text{ génératrice de } E \end{array} \right\} \implies m \leq n$

Propriété 15.33 E de dimension infinie $\iff E$ contient une famille libre infinie

théorème de la base incomplète

Toute famille libre d'un espace vectoriel E , engendré par une famille finie \mathcal{F} , peut être complétée avec des vecteurs de \mathcal{F} pour en constituer une base.

Théorème 15.34

$\left. \begin{array}{l} (e_1, \dots, e_m) \text{ libre} \\ (f_1, \dots, f_n) \text{ génératrice} \end{array} \right\} \implies \exists p \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n : \\ (e_1, \dots, e_m, f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \text{ base}$

Corollaire 15.35 Tout espace de dimension fini admet au moins une base

Pour la suite de cette section, $E \neq \{0\}$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel **de dimension finie**

dimension

Etant donné un espace vectoriel engendré par une famille finie, il existe un unique nombre entier positif ou nul, appelé dimension de E sur \mathbb{K} , égal à la fois au nombre d'éléments de toutes les bases (d'une base) de E , au nombre d'éléments de la plus grande (en nombre) famille libre de E et au nombre d'éléments de la plus petite (en nombre) famille génératrice de E

Convention 15.36 $\dim(\{0\}) = 0$

Définition 15.37 $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \text{card}(\mathcal{B})$ (\mathcal{B} base de E)

En particulier, la dimension d'un espace vectoriel est indépendante de la base choisie pour la calculer

Théorème 15.38 $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \max\{\text{card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset E \text{ et libre}\}$
 $= \min\{\text{card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ engendre } E\}$

– le théorème précédent ne s'appliquant pas à l'espace vectoriel $\{0\}$, par convention, il sera dit de dimension 0.

caractérisation Dans un espace de dimension finie n , une famille de n vecteurs est une base *ssi* elle est libre *ssi* elle est génératrice

Propriété 15.39 Soit E un espace vectoriel de dimension n . Alors,

$$\begin{aligned}(e_1, \dots, e_n) \text{ libre} &\iff (e_1, \dots, e_n) \text{ génératrice} \\ &\iff (e_1, \dots, e_n) \text{ base}\end{aligned}$$

sous-espace Un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie est lui-même de dimension finie, plus petite. De plus, ils sont égaux *ssi* leurs dimensions sont égales

Propriété 15.40 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$

Propriété 15.41 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors,

$$F = E \iff \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

– Pour prouver que deux ensembles E et F sont égaux, on procède en général par double inclusion mais pour les espaces vectoriels, on utilise de préférence la méthode plus facile suivante :

- Prouver que $F \subset E$. Cela implique que $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$.
- Prouver l'égalité des dimensions ou établir que $\dim_{\mathbb{K}}(F) \geq \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

15.3.2 Bases canoniques et dimensions de référence

Propriété 15.42 Si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de base $\{e_1, \dots, e_n\}$ alors, E est également un \mathbb{R} -espace vectoriel de base $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n\}$. En particulier $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(E)$

n -uplets

Propriété 15.43 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$

La base canonique de \mathbb{K}^n est la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ définie par $e_k = (0, \dots, 0, \underset{k^{\text{ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$ ($1 \leq k \leq n$)

Théorème 15.44 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2n$

La base canonique de \mathbb{C}^n , en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel, est la famille $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ définie par

$$\begin{aligned}e_k &= (0, \dots, 0, \mathbf{1}, 0, \dots, 0) \\ f_k &= (0, \dots, 0, \mathbf{i}, 0, \dots, 0) \quad (1 \leq k \leq n)\end{aligned}$$

$k^{\text{ième position}}$

Polynômes

Propriété 15.45 $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie

Propriété 15.46 $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1$

La base canonique de $\mathbb{K}[X]$ est la famille de polynômes (X^0, X^1, \dots, X^n)

Matrices

Propriété 15.47 $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = pq$

Une base de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})$ définie pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, où $E_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, qui vaut 1.

Fonctions

Propriété 15.48 Les espaces vectoriels $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont de dimension infinie pour $n \in \mathbb{N}$ et I intervalle contenant au moins deux points.

Suites

Propriété 15.49 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel de dimension infinie

15.3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Dans cette section, \mathcal{F} désigne une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (E est de dimension finie) et x désigne un vecteur de E .

Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace qu'ils engendrent.

rang d'une famille de vecteurs

Définition 15.50 $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$

– Le rang d'une famille \mathcal{F} est le nombre d'éléments de sa plus grande sous famille libre $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Matrice des coordonnées

Définition 15.51 $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

– (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées du vecteur x dans la base \mathcal{B}

– Bien faire attention à ne pas confondre les coordonnées d'un vecteur, avec le vecteur lui-même (cette confusion est d'autant plus probable lorsque E est \mathbb{K}^n ou un espace de matrices)

Caractérisation

Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de leurs matrices coordonnées (dans n'importe quelle base)

Propriété 15.52 Soient X_1, \dots, X_n les matrices des vecteurs x_1, \dots, x_n dans la base \mathcal{B} . Alors,

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}(X_1, \dots, X_n)$$

– C'est aussi le rang de la matrice rectangulaire dont les colonnes sont X_1, \dots, X_n .

famille génératrice//libre

Une famille finie est génératrice si son rang est égal à la dimension de l'espace la contenant. Une famille finie est libre si son rang est égal à son nombre d'éléments

Propriété 15.53 \mathcal{F} famille génératrice de $E \iff \text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)$

Propriété 15.54 \mathcal{F} famille libre dans $E \iff \text{rg}(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F})$

15.4 Produits cartésiens, sommes et supplémentaires Séquence 20 et 21

programme

- Somme de deux sous-espaces vectoriels
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. *Tout vecteur de la somme se décompose de manière unique.*
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Somme et somme directe de k sous-espaces vectoriels.
- Existence d'un supplémentaire en dimension finie.
- Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension d'un supplémentaire. *Si F et G sont supplémentaires, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.*
- Dimension d'une somme directe de k espaces vectoriels.
- Concaténation de bases de sous-espaces vectoriels. *Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases.*

15.4.1 Produit cartésien

produit cartésien

Propriété 15.55 Si E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels, alors $E \times F$ l'est également pour les opérations définies par

$$\begin{aligned} (x,y) + (x',y') &= (x+x',y+y') && \text{pour } (x,y) \text{ et } (x',y') \text{ dans } E \times F \\ \lambda(x,y) &= (\lambda x, \lambda y) && \text{pour } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } (x,y) \text{ dans } E \times F \end{aligned}$$

Propriété 15.56 Si E et F sont de dimensions finies, $E \times F$ l'est aussi et $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$

Si e_1, \dots, e_n est une base de E et f_1, \dots, f_k est une base de F , alors $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_k)$ est une base de $E \times F$.

15.4.2 Sommes et supplémentaires

Sommes d'espaces vectoriels

Définition 15.57 La somme de n sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_n d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est l'espace vectoriel

$$E_1 + \dots + E_n = \{x_1 + \dots + x_n : x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$$

Somme directe

Définition 15.58 La somme $E_1 + \dots + E_n$ est directe et notée $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ ssi

$$x_1 + \dots + x_n = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0 \quad (x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n)$$

Dimension d'une somme directe

Propriété 15.59 Soient E_1, \dots, E_n sont des sous-espaces de dimension finie de E , qui sont en somme directe. Alors, $\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n)$

Propriété 15.60 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors

$$\begin{aligned} F + G &= \{x + y : x \in F, y \in G\} \\ F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \end{aligned}$$

Propriété 15.61 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , alors

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \\ \dim(F \oplus G) &= \dim(F) + \dim(G) \end{aligned}$$

Propriété 15.62 Soient F et G des sous-espaces de E . Alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \oplus G \end{cases}$$

Propriété 15.63 Tout sous-espace F d'un espace E de dimension finie admet un supplémentaire G dans E et $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$

Propriété 15.64 Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels de E munis de bases (finies) $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$. Alors

$$E_1 \oplus \dots \oplus E_n \iff (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \text{ est une base de } E_1 + \dots + E_n$$

15.5 Applications linéaires

Séquence 25 et 26

Dans cette section E , F et G désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

15.5.1 Applications linéaires

Dans cette section, E et F désignent deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ est une application

linéarité

Définition 15.65 f linéaire $\iff f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in E$)

Méthode 15.66 (Pour prouver que $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire)

1. S'assurer que E et F sont bien des espaces vectoriels
2. Vérifier que $f : E \rightarrow F$ est une application : pour $x \in E$, montrer que $f(x)$ existe et appartient à F
3. Établir la linéarité de f : pour λ et μ dans \mathbb{K} et x et y dans E , vérifier que $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

morphismes

Définition 15.67 f morphisme $\iff f$ application linéaire

Définition 15.68 f endomorphisme $\iff E = F$ et f application linéaire

Définition 15.69 f isomorphisme $\iff f$ application linéaire bijective

Définition 15.70 f automorphisme $\iff E = F$ et f linéaire et bijective

- Une application linéaire est également appelé un « morphisme d'espaces vectoriels »
- Deux espaces vectoriels sont isomorphes *ssi* il existe un isomorphisme entre eux
- Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est une forme linéaire *ssi* $F = \mathbb{K}$.

espaces

Notation 15.71 $\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \rightarrow F \text{ application linéaire}\}$

Notation 15.72 $\mathcal{L}(E) = \{f : E \rightarrow E \text{ application linéaire}\}$

Muni de l'addition et de la multiplication externe des applications, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires $f : E \rightarrow F$ forme un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété 15.73 $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$ sur \mathbb{K}

composition

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Propriété 15.74 $\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(E, F) \\ g \in \mathcal{L}(F, G) \end{array} \right\} \implies g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

endomorphismes
qui commutent

Définition 15.75 Soient u et v deux endomorphismes de E . Alors, u et v commutent $\iff u \circ v = v \circ u$

bijection réciproque

Propriété 15.76 f linéaire et bijective $\implies f^{-1}$ linéaire et bijective

groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est un groupe (non-commutatif) pour la composition des applications, appelé groupe linéaire de E .

Notation 15.77 $\mathcal{A}ut(E) = \mathcal{G}l(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ bijective}\}$ (E \mathbb{K} -EV)

– L'élément neutre de $(\mathcal{G}l(E), \circ)$ est l'identité Id_E .

algèbre

Propriété 15.78 On calcule dans $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ comme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times$, c'est à dire un peu comme avec les nombres réels en se rappelant que **la composition n'est pas commutative**

– Plus simplement, la loi de composition \circ peut interagir avec les lois $+$ et \cdot pour les applications linéaires. Ainsi, la loi \circ est distributive sur la loi $+$

$$\begin{cases} \forall f, g \in \mathcal{L}(F, G), \forall h \in \mathcal{L}(G, H), h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g. \\ \forall h \in \mathcal{L}(H, F), \forall f, g \in \mathcal{L}(F, G), (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h \end{cases}$$

La loi \circ respecte la loi du scalaire mobile (elle commute avec \cdot)

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \quad \lambda \cdot g \circ f = (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f).$$

puissances

Convention 15.79 $u^0 = \text{Id}_E$ ($u \in \mathcal{L}(E)$)

Notation 15.80 $u^n = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}$ ($u \in \mathcal{L}(E), n \geq 1$)

Notation 15.81 $u^{-n} := \underbrace{u^{-1} \circ \dots \circ u^{-1}}_{n \text{ fois}}$ ($u \in \mathcal{G}l(E), n \geq 1$)

identité algébrique

Théorème 15.82 Soient u et v deux endomorphismes de E **qui commutent**. Alors,

$$u^n - v^n = (u - v) \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ v^{n-1-k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

binôme de Newton

Théorème 15.83 Soient u et v deux endomorphismes de E **qui commutent**. Alors,

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

15.5.2 Noyau et image

Dans cette section, E et F désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Image réciproque L'image réciproque d'un espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel

Propriété 15.84 $f^{-1}(H)$ est un SEV de E (H SEV de F)

Noyau Le noyau d'une application linéaire est l'ensemble des vecteurs (au départ) dont l'image par f est nulle

Définition 15.85 $\text{Ker}(f) := \{x \in E : f(x) = 0\}$

– Déterminer le noyau d'une application linéaire u , c'est résoudre l'équation

$$u(x) = 0.$$

Propriété 15.86 Le noyau d'un morphisme $f : E \rightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de E

Injectivité

Propriété 15.87 f injective $\iff \text{Ker}(f) = \{0\}$

Méthode 15.88 (Pour étudier si une application linéaire est injective)

Calculer son noyau

Image directe

Propriété 15.89 $f(H)$ est un SEV de F (H SEV de E)

Image L'image d'une application linéaire est l'ensemble des images (à l'arrivée) par f des vecteurs au départ

Définition 15.90 $\text{Im}(f) := \{f(x) : x \in E\} = f(E)$

– Déterminer le noyau d'une application linéaire u , c'est résoudre l'équation

$$u(x) = 0.$$

surjectivité

Propriété 15.91 f surjective $\iff \text{Im}(f) = F$ ($f : E \rightarrow F$ linéaire)

– déterminer le noyau (l'injectivité) d'une application linéaire est en général beaucoup plus facile que déterminer son image (sa surjectivité). La dimension des espaces vectoriels, que nous introduirons plus tard, va nous permettre de déterminer l'image (la surjectivité) BEAUCOUP plus facilement.

équation linéaire affine

Propriété 15.92 $\{x \in E : u(x) = b\} = \emptyset$ si $b \notin \text{Im}(u)$ ($b \in F$)
 $= x_0 + \text{Ker}(u)$ si $b = u(x_0)$

– L'ensemble solution S de l'équation $u(x) = 0$ n'est jamais vide, c'est l'espace vectoriel $\text{Ker}(u)$.

– Lorsque $b \neq 0$, l'ensemble solution de l'équation $u(x) = b$ est vide si b n'est pas une image de u et est égal à

$$x_0 + \text{Ker}(u) = \{x_0 + h : h \in \text{Ker}(u)\}$$

lorsque b est une image $b = u(x_0)$.

15.5.3 Homothétie, projections, symétries.

Dans cette section, f désigne un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E

Homothéties

homothétie

Définition 15.93 f est une homothétie de rapport $\lambda \iff h = \lambda \text{Id}_E$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)

Propriété 15.94 Une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est un automorphisme de E , de bijection réciproque l'homothétie de rapport inverse $\lambda^{-1} \text{Id}_E$

– Une propriété remarquable des homothéties vectorielles est qu'elles commutent avec tous les endomorphismes de E . Autrement dit,

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad (\lambda \text{Id}_E) \circ f = f \circ (\lambda \text{Id}_E) = \lambda f.$$

En particulier, on peut utiliser le binôme de Newton pour les homothéties.

Propriété 15.95 Les homothéties commutent avec tous les endomorphismes de E

Projections

Dans cette section, p désigne un endomorphisme d'un \mathbb{K} espace vectoriel $E = F \oplus H$.

projection

Définition 15.96 p est un projecteur sur F parallèlement à $H \iff \begin{cases} p(x) = x & (x \in F) \\ p(x) = 0 & (x \in G) \end{cases}$

– Une telle projection est un projecteur

Propriété 15.97 Soit p un projecteur sur F parallèlement à H . Alors, $\begin{cases} F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) \\ G = \text{Ker}(p) \end{cases}$

caractérisation

Propriété 15.98 p projecteur $\iff p^2 = p$

– En dehors des rares cas pour lesquels $E = \{0\}$ ou $p = \text{Id}_E$, aucun projecteur n'est bijectif

– On utilise également le mot « projecteur » à la place de « projection »

Symétries

Dans cette section, s désigne un endomorphisme d'un \mathbb{K} espace vectoriel $E = F \oplus H$.

symétrie

Définition 15.99 s symétrie de F parallèlement à $G \iff \begin{cases} s(x) = x & (x \in F) \\ s(x) = -x & (x \in G) \end{cases}$

Propriété 15.100 Une symétrie s de E est un automorphisme, dont la bijection réciproque est elle-même

Propriété 15.101 Soit s une symétrie de F parallèlement à H . Alors, $\begin{cases} F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \\ G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E) \end{cases}$

symétries

Propriété 15.102 s symétrie $\iff s^2 = \text{Id}_E$

15.5.1 Rang

Dans cette section, E et F désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels

espaces isomorphes

Définition 15.103 E et F sont isomorphes ssi il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$ entre eux

lien avec \mathbb{K}^n

Théorème 15.104 E isomorphe avec $\mathbb{K}^n \iff \dim(E) = n$

– Plus précisément, pour chaque base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E , l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\rightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\mapsto \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k e_k \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- le théorème précédent affirme que :
- Tous les \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension $n \geq 1$ ont la même structure.
- Plutôt que de travailler dans un espace théorique E , on peut fixer une base et travailler dans l'espace \mathbb{K}^n avec les coordonnées.
- Le choix de la base détermine l'isomorphisme.

isomorphisme
et dimension

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes *ssi* ils ont même dimension

Corollaire 15.105 Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes *ssi* ils ont la même dimension

base

Théorème 15.106 Soient E, F de dim finie. Alors, $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$

Propriété 15.107 Si $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_p\}$ sont des bases respectives de E et F , alors la famille d'applications linéaires $\{g_{i,j}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ définie par

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, \quad g_{i,j}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) := \lambda_i f_j$$

forme une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

rang

Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image (lorsqu'elle est de dimension finie).

Définition 15.108 Soit u une application linéaire dont l'image est de dimension finie. Alors, $\text{rg}(u) := \dim \text{Im}(u)$

caractérisation

Propriété 15.109 Soient E et F deux espaces vectoriels **de même dimension finie** $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

$$u \text{ bijective} \iff u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff \text{rg}(u) = n$$

composition

On ne change pas le rang d'une application linéaire de rang fini en la composant à gauche ou/et à droite par un isomorphisme.

Propriété 15.110 On ne change pas le rang fini d'une application linéaire en la composant à gauche ou à droite par un isomorphisme

15.5.2 Matrices

Dans cette section, x désigne un vecteur de E , un espace vectoriel de base $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_p\}$, et F désigne un espace vectoriel de base $\mathcal{F} := \{f_1, \dots, f_q\}$.

matrice
d'un vecteur

Définition 15.111 $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \iff \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

Propriété 15.112 La matrice du vecteur x dans la base \mathcal{E} est unique. De plus, l'application réalisant cette association est un isomorphisme

– A chaque vecteur x de E est associée la matrice (unique) de ses coordonnées dans la base \mathcal{E} . L'application réalisant cette association est l'isomorphisme

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ x &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) \end{aligned}$$

– Parfois, les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec les vecteurs de l'espace vectoriel \mathbb{K}^n . C'est pratique mais il faut savoir que c'est dangereux d'identifier des vecteurs colonnes à des n -uplets que l'on écrit en ligne...

famille de
vecteurs

La matrice d'une famille de vecteurs est la matrice dont les colonnes sont les matrices des vecteurs.

Définition 15.113 Soient v_1, \dots, v_n des vecteurs de E , de matrice V_1, \dots, V_n dans \mathcal{E} . Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_n \end{pmatrix}$

– Autrement dit, on a

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket v_j = \sum_{1 \leq i \leq p} a_{i,j} e_i \iff \text{Mat}_{\mathcal{E}}(v_1, \dots, v_q) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

applica-
tion linéaire

Définition 15.114 Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_p))$

– Autrement dit, notant $\mathcal{F} := \{f_1, \dots, f_q\}$ la base finie de F , on a

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket u(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq p} a_{i,j} f_i \iff \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Propriété 15.115 La matrice de l'application linéaire u associée aux bases \mathcal{E} et \mathcal{F} est unique. De plus, l'application réalisant cette association est un isomorphisme

- Cette propriété est fondamentale car, elle permet de transformer un problème théorique portant sur des applications linéaires en problème calculatoire et concret portant sur des matrices de coordonnées.
- En bref, le fait de fixer une base \mathcal{E} de E et une base \mathcal{F} de F permet d'associer de manière **unique** à chaque application linéaire $u : E \rightarrow F$ une matrice U de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et réciproquement.
- L'application précédente étant un isomorphisme, on a

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(v).$$

caractérisation

Une application linéaire est complètement caractérisée par la donnée de ses images sur une base (ou plus généralement sur une famille génératrice)

Propriété 15.116

$$\forall (v_1, \dots, v_p) \in F^p, \quad \exists ! u \in \mathcal{L}(E, F) : \quad u(e_i) = v_i \quad (1 \leq i \leq p)$$

égalité

Deux applications linéaires sont égales ssi elles coïncident sur une base (ou plus généralement sur une famille génératrice)

Propriété 15.117 Soient u et v deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E, F)$. Alors,

$$u = v \iff u(e_i) = v(e_i) \quad (1 \leq i \leq p)$$

rang

Propriété 15.118 Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors, $\text{rg } u = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$

En particulier, le rang d'une application linéaire est indépendant des bases choisies pour le calculer

- Le rang d'une application linéaire, comme le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice qui leur est associée

caractérisation

Propriété 15.119 Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{E} et \mathcal{F} bases de E et F . Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors, u bijective $\iff \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ inversible

image

Propriété 15.120 Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) \quad (x \in E)$$

- Autrement dit, si X est la matrice des coordonnées de $x \in E$ dans la base \mathcal{E} , si U est la matrice de l'endomorphisme u dans les bases \mathcal{E} et \mathcal{F} et si Y est la matrice des coordonnées de $y \in F$ dans la base \mathcal{F} , on a

$$y = u(x) \iff Y = UX.$$

composée La matrice d'une composée est le produit des matrices (dans le même ordre)

Théorème 15.121 Soient $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ deux application linéaires avec \mathcal{G} base de l'espace vectoriel de dimension finie G . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u).$$

inverse La matrice d'une bijection réciproque est l'inverse de la matrice de la bijection

Théorème 15.122 Soit $u : E \rightarrow F$ un isomorphisme. Alors, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)^{-1}.$$

Matrice de passage

La matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} est la matrice de l'identité de \mathcal{C} dans \mathcal{B} , c'est aussi la matrice des coordonnées des vecteurs de la base \mathcal{C} décomposés sur la base \mathcal{B}

Définition 15.123 Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors, $\text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$

Propriété 15.124 Une matrice de passage est inversible

inverse La matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} est l'inverse de la matrice de passage de la base \mathcal{C} à la base \mathcal{B}

Propriété 15.125 Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} des bases d'un même espace vectoriel de dimension finie. Alors,

$$\text{Mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) = \text{Mat}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})^{-1}$$

**change-
ment de base
vecteur**

Propriété 15.126 Soit \mathcal{B} et \mathcal{C} des bases d'un même espace vectoriel E de dimension finie. alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\text{Id}_E) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad (x \in E)$$

**changement
de bases
applica-
tion linéaire**

Propriété 15.127 Soit $u : E \rightarrow F$ un morphisme entre des espaces de dimension finie E , de bases \mathcal{E} et \mathcal{E}' , et F , de bases \mathcal{F} et \mathcal{F}' . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\text{Id}_F) \times \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\text{Id}_E)$$

Probabilités

programme L'objectif au premier semestre est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure. Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts probabilistes de base, en ne faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires. C'est pourquoi, pour le premier semestre, on se restreindra à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.
On évitera pour cette première approche un usage avancé de la combinatoire, et l'on s'attachera à utiliser le vocabulaire général des probabilités.

16 Espaces probabilisés Séquence 7 et 8

16.1 Expériences aléatoires

programme

- Observation d'une expérience aléatoire - Événements
 - Expérience aléatoire. *On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.*
 - Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles. *On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.*
 - Système complet d'événements fini. *Une famille $(A_i)_{i \in I}$, où I est un sous-ensemble fini de \mathbb{N} , est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes : $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\cup_{i \in I} A_i = \Omega$*

expérience aléatoire

Définition 16.1 Une expérience aléatoire est un processus (renouvelable) de résultat incertain

- Chaque renouvellement de l'expérience est appelé une épreuve. Une épreuve peut combiner plusieurs épreuves élémentaires, consécutives ou simultanées. Par exemple, le jet de deux dés peut être considéré comme la combinaison de deux épreuves élémentaires.

univers

L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est appelé univers des possibles ou univers des résultats observables.

Définition 16.2 $\Omega = \{\text{résultats possibles}\}$

- L'univers des possibles est fini si l'ensemble Ω est de cardinal fini.
- L'univers des possibles est traditionnellement noté Ω .

16.2 Tribus Séquence 24

tribu

Définition 16.3 \mathcal{T} tribu de $\Omega \iff \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega \in \mathcal{T}$ et \mathcal{T} stable pour $\left\{ \begin{array}{l} \text{complémentaire} \\ \text{union (dénombrable)} \end{array} \right.$

- Lorsque l'ensemble Ω est dénombrable (en particulier lorsque Ω est fini), l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

Propriété 16.4 $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu de Ω

- La tribu grossière de Ω est la plus petite tribu de Ω au sens de l'inclusion

Propriété 16.5 $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω

- $\mathcal{P}(\Omega)$ la plus grande tribu de Ω au sens de l'inclusion

16.3 Espaces probabilisables

Dans cette section Ω désigne un ensemble non vide

Un espace probabilisable est un ensemble muni d'une tribu.

Définition 16.6 (Ω, \mathcal{T}) espace probabilisable $\iff \mathcal{T}$ tribu de Ω

Les résultats potentiels d'une expérience aléatoire sont appelés des événements. Un événement d'un espace probabilisable est un élément de sa tribu.

Définition 16.7 Soient (Ω, \mathcal{T}) , un espace probabilisable. Alors, A événement $\iff A \in \mathcal{T}$

Définition 16.8 \emptyset est l'événement impossible

- L'événement \emptyset n'est jamais réalisé.

Définition 16.9 Ω est l'événement certain

- L'événement Ω est toujours réalisé.

Définition 16.10 Un événement est élémentaire, lorsqu'il contient exactement un élément de Ω .

Convention 16.11 On dit que « l'événement A implique l'événement B » lorsque $A \subset B$.

Pour la suite de cette section, les lettres majuscules représentent des événements

Propriété 16.12 l'ensemble $\bar{A} = \mathcal{C}_{\Omega}A$ est l'événement contraire de A .

Propriété 16.13 l'ensemble $A \cup B$ est l'événement « A ou B ».

Propriété 16.14 l'ensemble $A \cap B$ est l'événement « A et B ».

Propriété 16.15 l'ensemble $A \setminus B$ est l'événement « A mais pas B ».

Corollaire 16.16 Le complémentaire d'un événement est un événement

Corollaire 16.17 Une réunion finie (*resp. dénombrable*) d'événements est un événement

Corollaire 16.18 Une intersection finie (*resp. dénombrable*) d'événements est un événement

événements incompatibles Deux événements sont incompatibles si'ils sont disjoints.

Définition 16.19 A et B incompatibles $\iff A \cap B = \emptyset$

Définition 16.20 Les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement incompatibles ssi $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$

système complet

Définition 16.21 Pour I ensemble fini (*resp. dénombrable*), les événements $(E_i)_{i \in I}$ forment un système complet fini (*resp. dénombrable*) ssi
$$\begin{cases} E_i \cap E_j = \emptyset & (i \neq j) \\ \bigcup_{i \in I} E_i = \Omega \end{cases}$$

16.4 Espaces probabilisés

programme

- Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application additive P à valeurs dans $[0,1]$ et vérifiant $P(\Omega) = 1$. Cas de l'équiprobabilité.
- Notion d'espace probabilisé. Lors du premier semestre, on se restreindra à la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Formule de Poincaré ou du crible pour deux et trois événements.

Dans cette section, (Ω, \mathcal{T}) désigne un espace probabilisable

probabilité

Définition 16.22 Une probabilité sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{T}) est une application $P : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i) \quad ((A_i)_{i \in I} \text{ événements mutuellement incompatibles avec } I \text{ dénombrable})$$

– On a nécessairement $P(\emptyset) = 0$, ainsi que

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ P(B \setminus A) &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

En particulier, si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

espace probabilisé **Définition 16.23** (Ω, \mathcal{T}, P) espace probabilisé $\iff P$ probabilité de (Ω, \mathcal{T}) , espace probabilisable

événement quasi-certain **Définition 16.24** A quasi-certain $\iff P(A) = 1$

événement quasi-impossible **Définition 16.25** A quasi-impossible $\left| \begin{array}{l} A \text{ négligeable} \end{array} \right. \iff P(A) = 0$

événements équiprobables **Définition 16.26** Des événements sont équiprobables *ssi* ils ont tous la même probabilité de se réaliser

probabilités et univers finis **Théorème 16.27** Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. Alors,
 $\exists P$ probabilité sur $\Omega : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(\omega_i) = p_i \iff \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \geq 0 \\ p_1 + \dots + p_n = 1 \end{cases}$

probabilité uniforme **Définition 16.28** La probabilité uniforme sur un univers fini Ω , non vide, est l'application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} \quad (A \subset \Omega)$$

– On retiendra que la probabilité (uniforme) p d'un événement est donné par

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

formule de Poincaré **Propriété 16.29** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propriété 16.30

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C)$$

formule du crible **Propriété 16.31**

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

– Pour des événements A, B, C et D , cela donne

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ &\quad - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) + P(B \cap C) + P(B \cap D) + P(C \cap D)) \\ &\quad + (P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) + P(A \cap B \cap C)) \\ &\quad - P(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

16.5 Limite monotone

Séquence 24

programme

- Théorème de la limite monotone *Pour toute suite croissante (A_n) d'événements*

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

Pour toute suite décroissante (A_n) d'événements

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

Dans cette section, la monotonie des suites d'événements est relative à l'inclusion

Théorème 16.32

$$P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad ((A_n)_{n \geq 0} \text{ suite croissante d'événements})$$

$$P\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad ((A_n)_{n \geq 0} \text{ suite décroissante d'événements})$$

Corollaire 16.33 Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \geq 0}$,

$$P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{0 \leq k \leq n} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{0 \leq k \leq n} A_k\right)$$

16.6 Probabilités conditionnelles

programme

- Probabilité conditionnelle. Notation P_A . P_A est une probabilité. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_A)$ est un espace probabilisé.
- Formule des probabilités composées. Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Si $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors $P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.
- Formule des probabilités totales. Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet fini, alors pour tout événement B on a

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$$

- Formule de Bayes. On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

Dans toute cette section, (Ω, \mathcal{T}, P) est un espace probabilisé et les lettres majuscules désignent des événements

probabilité
conditionnelle

Etant donné un événement E de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant E est le nombre défini par

Définition 16.34 $P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$ ($P(E) \neq 0$)

- L'événement A sachant E est parfois noté $A|E$
- La probabilité conditionnelle de A sachant E peut également être notée $P(A|E)$.
- Ne pas confondre la notation $A|E$ (A sachant que E est réalisé) avec l'événement $A \setminus E$ (A mais pas E)
- Si E est de probabilité nulle, on a $P(A \cap E) = 0$ et $P(A) = P(A \setminus E)$. En d'autres termes, le fait de savoir que l'événement E est réalisé n'apporte quasiment aucune information pertinente supplémentaire (pour les probabilités).

La probabilité conditionnelle sachant E est une nouvelle probabilité sur Ω

Propriété 16.35 Lorsque $P(E) \neq 0$, on définit une probabilité de (Ω, \mathcal{T}) en posant

$$\begin{aligned} P_E : \mathcal{T} &\rightarrow [0,1] \\ A &\mapsto P_E(A) \end{aligned}$$

- En particulier, $(\Omega, \mathcal{T}, P_E)$ est un nouvel espace probabilisé (les événements sont les mêmes mais leurs probabilités sont différentes)
- La probabilité conditionnelle étant une probabilité, elle satisfait les propriétés suivantes

espace pro-
babilisé

$$P_E(\bar{A}) = 1 - P_E(A)$$

$$P_E(B \setminus A) = P_E(B) - P_E(A \cap B) \quad P_E(A \cup B) = P_E(A) + P_E(B) - P_E(A \cap B)$$

conditionnement En pratique, la formule de conditionnement permet de calculer facilement la probabilité d'une conjonction (intersection) d'événements.

Propriété 16.36 $P(A \cap E) = P(E) \times P_E(A) \quad (P(E) \neq 0)$

conditionnement successif La formule des probabilités composées permet de calculer la probabilité d'une intersection multiple.

Propriété 16.37

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \quad (P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0)$$

– La condition $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ assure l'existence de toutes les probabilités conditionnelles.

filtration

Propriété 16.38

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap E_i) \quad ((E_i)_{i \in I} \text{ système complet fini (resp. dénombrable)})$$

probabilités totales

Propriété 16.39

$$P(A) = \sum_{i \in I} P_{E_i}(A) \times P(E_i) \quad ((E_i)_{i \in I} \text{ système complet fini (resp. dénombrable) vérifiant } P(E_i) \neq 0)$$

– La formule des probabilités totales est fondamentale pour le calcul des probabilités

– Lorsque le système total E_1, \dots, E_n comporte des événements négligeables, on a tout de même

$$P(A) = \sum_{P(E_i) > 0} P_{E_i}(A) \times P(E_i)$$

– La formule sert très souvent dans le cas d'un système total à deux éléments E, \bar{E} :

$$P(A) = P_E(A) \times P(E) + P_{\bar{E}}(A) \times P(\bar{E})$$

mule de Bayes

Propriété 16.40 Soit $(E_i)_{i \in I}$ un système complet fini (resp. dénombrable) d'événements vérifiant $P(E_i) \neq 0$. Alors,

$$P_A(E_i) = \frac{P(E_i) \times P_{E_i}(A)}{\sum_{k \in I} P(E_k) \times P_{E_k}(A)} \quad (1 \leq i \leq n)$$

– La formule sert très souvent dans le cas d'un système total à deux éléments B, \bar{B} :

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)}$$

16.7 Indépendance

programme

- Indépendance de deux événements. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. On remarquera que la notion d'indépendance est relative à la probabilité.
- Indépendance mutuelle de n événements. Si n événements A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i , avec $B_i = A_i$ ou \bar{A}_i .

indépendance

Deux événements sont indépendants si la probabilité de leur intersection est le produit de leurs probabilités

Définition 16.41 $A \perp B \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

complémentaire

Propriété 16.42

$$A \perp B \iff \bar{A} \perp B \iff A \perp \bar{B} \iff \bar{A} \perp \bar{B}$$

indépendance et conditionnement

Propriété 16.43

$$\begin{aligned} A \perp B &\iff P_A(B) = P(B) && (P(A) \neq 0) \\ &\iff P_B(A) = P(A) && (P(B) \neq 0) \end{aligned}$$

indépendance mutuelle

Des événements sont mutuellement indépendants si la probabilité de toute intersection finie est le produit de leurs probabilités

Définition 16.44 A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants ssi

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k}) \quad (1 \leq k \leq n \text{ et } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$$

Propriété 16.45 Soient A_1, \dots, A_n , des événements mutuellement indépendants. Alors, posant $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$ pour $1 \leq i \leq k \leq n$, les événements B_1, \dots, B_k sont mutuellement indépendants.

17 Variables aléatoires réelles Séquence 14

programme

- Variables aléatoires réelles

On introduit dans cette section la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Les variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie la démonstration des formules.

 - Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application de Ω dans \mathbb{R} .
On adoptera les notations habituelles telles que $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leq x]$, etc...
 - Système complet associé à une variable aléatoire.
 - Fonction de répartition d'une variable aléatoire X . $F_X(x) = P(X \leq x)$.
 - Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
 - variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$. La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. On se limitera à des cas simples, tels que $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, etc...
- Espérance d'une variable aléatoire. $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$
 - Théorème de transfert. $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ Théorème admis.
 - $E(aX + b) = aE(X) + b$.
 - Variance et écart-type d'une variable aléatoire. Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
 - Cas particulier où $V(X) = 0$.
 - Calcul de la variance. Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
 - $V(aX + b) = a^2V(X)$.
 - Variables centrées, centrées réduites. Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X

17.1 Généralités

Dans cette section, (Ω, \mathcal{T}) désigne un espace probablisable (la tribu \mathcal{T} des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$ au premier semestre *et \mathcal{T} tribu quelconque au second semestre*). Pour $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$, nous adoptons les notations habituelles

$$\begin{aligned}
 X^{-1}(] - \infty, x]) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = [X \leq x] \\
 X^{-1}(\{x\}) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = [X = x] \\
 X^{-1}(A) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = [X \in A] \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

variable aléatoire

Définition 17.1 Une V.A.R. sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{T}) est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}}_{[X \leq x] \text{ événement}} \in \mathcal{T} \quad (x \in \mathbb{R})$$

V.A.R. certaine

Définition 17.2 X est une V.A.R. certaine ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $X(\omega) = c$ ($\omega \in \Omega$)

V.A.R. quasi-certaine

Définition 17.3 X est une V.A.R. quasi-certaine ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = c) = 1$

univers image

Définition 17.4 L'univers image d'une V.A.R. X sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{T}) est l'ensemble image $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$

– Pour le calcul de probabilités, l'univers image $X(\Omega)$ sert davantage et est donc plus important que l'univers Ω .

système complet

Définition 17.5 Le système complet associé à une V.A.R. X sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{T}) , avec $X(\Omega)$ dénombrable, est la famille d'événements $\{[X = x]\}_{x \in X(\Omega)}$

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

d'une V.A.R.

Définition 17.6 La loi de X est la probabilité P_X définie sur $X(\Omega)$ par

$$P_X(A) = P(X \in A) \quad (A \text{ événement de } X(\Omega))$$

– Au premier semestre, $X(\Omega)$ est fini et les événements de $X(\Omega)$ sont tous les sous-ensembles de $X(\Omega)$

– Cette formule sera également valable au second semestre, lorsque \mathbb{R} sera muni de la tribu (borelienne) engendrée par les intervalles du type $] - \infty, x]$ ($x \in \mathbb{R}$)

fonction de répartition

Définition 17.7 La fonction de répartition de X est F_X l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Propriété 17.8 La fonction de répartition F_X d'une var X est croissante, continue à droite, sur \mathbb{R} et vérifie $F_X \xrightarrow{-\infty} 0$ et $F_X \xrightarrow{+\infty} 1$

Remarque : Si $X(\Omega)$ est dénombrable, elle est aussi constante par morceaux (en escalier)

Propriété 17.9 La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire

17.2 Espérance et variables aléatoires discrètes Séquence 14 et 24

programme

- *Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur (Ω, \mathcal{T}) . L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de \mathbb{N} ou \mathbb{Z} .*
- *Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$*
- *Tribu engendrée par une variable aléatoire discrète. La tribu \mathcal{T}_X des événements liés à X est la tribu engendrée par le système complet $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. Cette tribu est aussi appelée tribu engendrée par la variable aléatoire X et constitue l'information apportée par X .*
- *Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X . Étude de la loi de $Y = g(X)$.*
- *Espérance d'une variable aléatoire. Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.*
- *Théorème de transfert. Quand $X(\Omega)$ est infini, $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ est absolument convergente, et alors $E(g(X))$ est la somme de cette série. Théorème admis.*

Dans cette section, (Ω, \mathcal{T}, P) désigne un espace probabilisé et X une V.A.R. dont l'univers image $X(\Omega)$ est fini *ou dénombrable*. Une variable aléatoire finie est une variable aléatoire dont l'univers image est fini.

Définition 17.10 X V.A.R. finie $\iff X(\Omega)$ fini

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors le système complet associé à X est la famille

$$\{(X = x_1), \dots, (X = x_n)\}$$

variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire finie est une variable aléatoire dont l'univers image est fini.

Définition 17.11 X V.A.R. discrète $\iff X(\Omega)$ dénombrable

fonction de masse

Définition 17.12 La fonction de masse d'une V.A.R. **discrète** X est

$$\begin{aligned} p_X : X(\Omega) &\rightarrow [0,1] \\ x &\mapsto P(X = x) \end{aligned}$$

– La fonction de masse de X est également appelée (abusivement ?) « loi de probabilité de X ».

lien

Propriété 17.13 Si X est finie (*resp. discrète*), alors $F_X(x) = \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \leq x}} \underbrace{P(X = y)}_{p_X(y)}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Propriété 17.14 Si X est finie (*resp. discrète*), $p_X(x) = P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$ ($x \in \mathbb{R}$)

– Le rapport entre fonction de répartition et fonction de densité est un peu le même que le rapport entre primitive et dérivée, à partir de l'une, on peut retrouver l'autre.

espérance

Définition 17.15 Une V.A.R. discrète X admet une espérance

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \underbrace{P(X = x)}_{p_X(x)}$$

si, et seulement si, cette somme est absolument convergente

espérance

Corollaire 17.16 Soit X une V.A.R. finie, d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$$

formule de transfert

Théorème 17.17 Soit X une V.A.R. finie (*resp. discrète*) et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors,

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

si, et seulement si, cette somme est absolument convergente

– Cette formule permet de déterminer l'espérance d'une v.a. composée $Y = f(X)$, que l'on peut également calculer via la formule

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} xP(Y = y)$$

17.3 Espérance et variables aléatoires à densité

Séquence 30

programme

- Définition d'une variable aléatoire à densité. *On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} éventuellement privé d'un ensemble fini de points.*
- Toute fonction f_X à valeurs positives, qui éventuellement ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points, est une densité de X . *Pour tout x de \mathbb{R} , $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$*
- Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire à densité par la donnée d'une densité f_X
- Toute fonction f positive, continue sur \mathbb{R} éventuellement privé d'un nombre fini de points, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ est la densité d'une variable aléatoire (*résultat admis*).
- Transformation affine d'une variable à densité. *Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et la densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).*
- Espérance d'une variable à densité. *Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$ est absolument convergente. Dans ce cas, $E(X)$ est égale à cette intégrale. Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.*

A.R. à densité

Définition 17.18 Une V.A.R. X est à densité ssi sa fonction de répartition F_X est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} éventuellement privé d'un ensemble fini de points

densité Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. à densité

Définition 17.19 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une densité de X ssi f ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points

Propriété 17.20 f densité de $X \iff F_X(x) = \int_{-\infty}^x f \quad (x \in \mathbb{R})$

Théorème 17.21 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la densité d'une V.A.R. X ssi f est positive, continue sur \mathbb{R} privé d'un nombre fini de points et vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$

Propriété 17.22 X est une V.A.R. à densité *ssi* $aX + b$ est une V.A.R. à densité ($a \neq 0, b \in \mathbb{R}$)

Méthode 17.23 (Pour obtenir fonction de répartition et densité de $Y = aX + b$)

1. Calculer $F_Y(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq y - b) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad a > 0$$

$$= P\left(X > \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad a < 0$$

2. Dériver (la composée obtenue) pour en déduire la densité f_Y

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \text{si } a > 0$$

$$= -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \text{si } a < 0$$

espérance

Définition 17.24 Une V.A.R. X de densité f admet une espérance

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

si, et seulement si, cette intégrale converge absolument

17.4 Espérance

programme

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- Variables aléatoires centrées
- Moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$) Notation $m_r(X) = E(X^r)$

Dans cette section, X est une V.A.R. finie, *discrète ou à densité* sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

espérance d'une V.A.R. quasi certaine

Propriété 17.25 Soit $c \in \mathbb{R}$ et $X = c$ presque sûrement. Alors, $E(X) = c$

moments

Définition 17.26 Le moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de X est le nombre $m_k(X) = E(X^k)$, *s'il existe*.

V.A.R. centrée

Définition 17.27 X est une V.A.R. centrée *ssi* X admet une espérance et $E(X) = 0$

Propriété 17.28 X est une V.A.R. positive et centrée ssi $X = 0$ presque sûrement

linéarité

Propriété 17.29 Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et des V.A.R. X et Y *admettant une espérance*. Alors, la V.A.R. $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$

Corollaire 17.30 Soit X une V.A.R. *admettant une espérance*. Alors,

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

Méthode 17.31 (Pour centrer une V.A.R. X , qui admet une espérance) Lui soustraire son espérance pour obtenir la V.A.R. centrée $Y = X - E(X)$

Dans la suite de cette section, X admet une espérance

positivité
Croissance

Propriété 17.32 $X \geq 0$ p.s. $\implies E(X) \geq 0$

Propriété 17.33 $a \leq X \leq b$ p.s. $\implies a \leq E(X) \leq b$

Propriété 17.34 $X \leq Y$ p.s. $\implies E(X) \leq E(Y)$

tribu image

Propriété 17.35 La tribu image de X est la tribu

$$\mathcal{T}_X := \{A \subset X(\Omega) : (X \in A) \in \mathcal{T}\}$$

- \mathcal{T}_X est une tribu de l'univers image, de sorte que $(X(\Omega), \mathcal{T}_X)$ est un espace probabilisable.
- Pour le calcul de probabilités, les événements de la tribu image servent davantage et sont donc plus importants que les événements de l'univers Ω .
- Etant donné un événement A de la tribu image, on notera parfois

$$(X \in A) := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}.$$

- Etant donné $x \in \mathbb{R}$, on notera également

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \quad \text{et} \quad (X \leq x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$$

probabilité image

Propriété 17.36 L'application $P_X : \mathcal{T}_X \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité

$$A \mapsto P(X \in A)$$

- En particulier, $(X(\Omega), \mathcal{T}_X, P_X)$ est un espace probabilisé. C'est l'espace probabilisé image de (Ω, \mathcal{T}, P) par X .

17.5 Variance

programme

- Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète. Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$
- Calcul de la variance. Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$
- Cas particulier où $V(X) = 0$
- Variables centrées, centrées réduites. Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X .

Dans cette section, X désigne une V.A.R. sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) , qui admet une espérance.

variance La variance est le moment d'ordre 2 de la va centrée $X - E(X)$

Définition 17.37 *Lorsqu'elle existe*, la variance d'une V.A.R. X est le nombre

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Propriété 17.38 $V(X) = 0$ ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $X = c$ presque sûrement

formule de Koenig-Huygens

La variance est la différence de l'espérance du carré et du carré de l'espérance.

Propriété 17.39 X admet une variance (et une espérance) ssi X admet un moment d'ordre 2

Propriété 17.40 *Lorsque la variance de X existe*,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

transformation affine

Propriété 17.41 Si X admet une variance, alors $\lambda X + \mu$ admet une variance pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

Propriété 17.42 $V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X)$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$)

positivité

Propriété 17.43 $V(X) \geq 0$ lorsque X admet une variance

17.6 Ecart type

Dans cette section, X désigne une V.A.R. sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) , qui admet une variance.

écart type L'écart type est la racine carrée de la variance

Définition 17.44 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

transformation affine

Propriété 17.45 $\sigma(\lambda X + \mu) = |\lambda|\sigma(X)$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$)

positivité

Propriété 17.46 $\sigma(X) \geq 0$

V.A.R. réduite

Définition 17.47 X est réduite $\iff \begin{cases} V(X) = 1 \\ \sigma(X) = 1 \end{cases}$

Méthode 17.48 (Pour réduire une V.A.R. X d'écart type $\sigma \neq 0$) Diviser par σ pour obtenir une V.A.R. réduite $Y = \frac{X}{\sigma}$

Propriété 17.49 Soit X une V.A.R. admettant une espérance μ et un écart type $\sigma > 0$. Alors, on définit une V.A.R. centrée et réduite X^* en posant

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \iff X = \mu + \sigma X^*$$

17.7 Approximations

Séquence 34, 35 et 36 ?

17.7.1 Théorèmes fondamentaux

programme

- Inégalité de Markov pour les variables aléatoires discrètes. *Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$:*

$$P(X \leq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires discrètes. *Pour toute variable X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon > 0$*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Inégalité de Markov

Théorème 17.50 Soit X une V.A.R. positive presque sûrement *admettant une espérance*. Alors,

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$$

Théorème 17.51 Soit X une V.A.R. *admettant une variance*. Alors,

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0)$$

17.7.2 Convergence en probabilité

programme

- Convergence en probabilité : si (X_n) et X sont des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{T}, P) , (X_n) converge en probabilité vers X si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$. Notation $X_n \xrightarrow{P} X$
- Loi faible des grands nombres pour la loi binomiale. Si (X_n) est une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $(\frac{X_n}{n})$ converge en probabilité vers p
La loi faible des grands nombres permet une justification partielle, a posteriori, de la notion de probabilité d'un événement, introduite intuitivement.

Dans cette section, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X sont des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{T}, P)

Définition 17.52

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

Théorème 17.53

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \quad (n \in \mathbb{N}) \implies \frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

17.7.3 Convergence en loi

programme

- Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires vers X . Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
- Cas où les X_n et X sont à valeurs dans \mathbb{N} .

Inégalité de Bienay-Tchebychev

Convergence en probabilité

loi faible des grands nombres (loi binomiale)

- Si (np_n) tend vers un réel strictement positif λ , convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ vers une variable suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
- Théorème limite central pour la loi binomiale et pour la loi de Poisson. *Si (X_n) est une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (respectivement $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$), alors la suite de variables aléatoires centrées réduites (X_n^*) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Théorème admis.*

Dans cette section, $p \in [0, 1]$, $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X et Y sont des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{T}, P)

Conver-
gence en loi

Définition 17.54 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad (F \text{ continue en } x)$

Théorème li-
mite central

Théorème 17.55 $\left. \begin{array}{l} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \quad (n \in \mathbb{N}) \\ X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array} \right| \implies X_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \text{ avec } Y \text{ de loi normale centrée, réduite}$

18 Lois usuelles

Séquence 14

18.1 Lois discrètes finies

programme <h2>Lois usuelles</h2>

- Variable aléatoire certaine.
- Loi de Bernoulli, espérance et variance. *Notation* $X \hookrightarrow B(p)$. *Variable indicatrice d'un événement. Notation* $1_{\mathbb{A}}$.
- Loi binomiale. *Notation* $X \hookrightarrow B(n,p)$.
 - Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$. *En lien avec le programme de terminale, le nombre $\binom{n}{p}$ sera introduit comme le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire.*
 - Formule du triangle de Pascal.
 - Formules $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$
 - Formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$. *Lorsque a et b sont strictement positifs, on pourra faire le lien avec la loi $B(n, \frac{a}{a+b})$.*
 - Espérance et variance d'une variable de loi binomiale.
- Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, espérance, variance. *Application, à l'étude de la loi uniforme sur $\{a, \dots, b\}$, où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Notation* $X \hookrightarrow U(\{a, \dots, b\})$.
- *Lois discrètes usuelles à valeurs dans un ensemble définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) . On généralisera les lois $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ vues lors du premier semestre.*

Dans cette section, X désigne une variable aléatoire réelle finie

18.1.1 Loi certaine

loi certaine

Définition 18.1 X suit une loi certaine, égale à $m \iff P(X = m) = 1$

– Pour une telle V.A.R., on dit que X suit la loi certaine égale à m et aussi que $X = m$ presque sûrement.

Pour la suite de cette section, X désigne une variable aléatoire réelle certaine égale à $m \in \mathbb{R}$

Univers image

Propriété 18.2 $X(\Omega) = \{m\}$

densité
fonction de
répartition

Propriété 18.3 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m \\ 1 & \text{si } x \geq m \end{cases}$

espérance
variance
écart type

Propriété 18.4 $E(X) = m$

Propriété 18.5 $V(X) = 0$

18.1.2 Loi uniforme

loi uniforme

Une v.a. finie suit la loi uniforme lorsque tous ses événements élémentaires sont équiprobables.

Définition 18.6 $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\}) \iff P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq i \leq n)$

– Le symbole $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ est une abréviation pour « X suit la loi uniforme sur l'ensemble E ».

Univers image

Propriété 18.7 $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Pour la suite de cette section, X désigne une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

densité
fonction de
répartition

Propriété 18.8 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{k}{n} & \text{si } k \leq x < k + 1 \\ 1 & \text{si } n \leq x \end{cases} \quad (1 \leq k < n)$

espérance
variance

Propriété 18.9 $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Propriété 18.10 $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$

– L'espérance d'une va de loi uniforme est la moyenne des valeurs prises par la va.

18.1.3 Loi de Bernoulli

Dans cette section, $p \in [0, 1]$ et $q = 1 - p$

loi de Bernoulli

Définition 18.11 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \iff P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = q$

– Le symbole $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ est une abréviation pour « X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ».

– Notant $q = 1 - p$, on a $q = P(X = 0)$.

- La loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ est la loi uniforme sur $\{0,1\}$.

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi de Bernoulli de paramètre p .

Univers image

Propriété 18.12 $X(\Omega) = \{0,1\}$

densité
fonction de
répartition

Propriété 18.13 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

espérance
variance

Propriété 18.14 $E(X) = p$

Propriété 18.15 $V(X) = pq$

18.1.4 Loi binomiale

Dans cette section, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $q = 1 - p$

loi binomiale

Définition 18.16 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \iff P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k \in \llbracket 0, n \rrbracket)$

- Le symbole $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ est une abréviation pour « X suit la loi binomiale de paramètres n et p ».

- La loi binomiale associée aux paramètres $n = 1$ et p est la loi de Bernoulli de paramètre p .

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi binomiale de paramètres n et p .

Univers image

Propriété 18.17 $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

espérance
variance

Propriété 18.18 $E(X) = np$

Propriété 18.19 $V(X) = npq$

- La somme de n variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres n et p .

18.2 Lois discrètes infinies

Séquence 24

programme

- Loi géométrique (rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance et variance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour tout nombre entier naturel non nul k ,

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

- Loi de Poisson : définition, espérance, variance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Dans cette section, $p \in]0,1]$, $q = 1 - p$, $\lambda > 0$ et X désigne une V.A.R.

18.2.1 Loi géométrique

Loi géométrique

Définition 18.20 $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \iff P(X = k) = pq^{k-1} \quad (k \geq 1)$

– Le symbole $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ est une abréviation pour « X suit la loi géométrique de paramètres p ».

– La loi géométrique modélise le rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli de paramètre p sans mémoire : la probabilité $p(k)$ correspond à la probabilité d'obtenir $k-1$ échecs suivis d'un succès dans une succession de k épreuves de Bernoulli.

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi géométrique de paramètre p .

Univers image

Propriété 18.21 $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

espérance
variance

Propriété 18.22 $E(X) = \frac{1}{p}$

Propriété 18.23 $V(X) = \frac{q}{p^2}$

18.2.2 Loi de Poisson

Loi de Poisson

Définition 18.24 $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \iff P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k \in \mathbb{N})$

– Le symbole $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ est une abréviation pour « X suit la loi de Poisson de paramètres λ ».

– La loi de Poisson est une loi qui décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne λ connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi de Poisson de paramètre λ .

Univers image

Propriété 18.25 $X(\Omega) = \mathbb{N}$

espérance
variance

Propriété 18.26 $E(X) = \lambda$

Propriété 18.27 $V(X) = \lambda$

18.3 Lois à densité

Séquence 30

programme

- Loi uniforme sur un intervalle. Espérance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \iff a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$$

- Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

- Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance. *Notation* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

18.3.1 Loi uniforme (continue)

Dans cette section, les nombres réels a et b vérifient $a < b$ et X désigne une V.A.R. à densité.

densité
fonction de
répartition

Définition 18.28 $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b] \iff f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriété 18.29 $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b] \iff F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$

Propriété 18.30 $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \iff a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b] \quad (a < b)$

Pour la suite de cette section, X désigne une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[a,b]$.

Univers image

Propriété 18.31 $X(\Omega) = [a,b]$

espérance
variance

Propriété 18.32 $E(X) = \frac{b+a}{2}$

Propriété 18.33 $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

18.3.2 Loi exponentielle

Dans cette section, $\lambda > 0$ et X désigne une V.A.R. à densité.

densité
fonction de
répartition

Définition 18.34 $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriété 18.35 $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Propriété 18.36 $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad (\lambda > 0)$

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi exponentielle de paramètres λ

Univers image

Propriété 18.37 $X(\Omega) = [0, +\infty[$

espérance
variance

Propriété 18.38 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Propriété 18.39 $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Propriété 18.40 $P_{X>T}(X > T + t) = P(X > t) \quad (T \geq 0, t \geq 0)$

Définition 18.41 Une V.A.R. suit une loi sans mémoire *ssi* $X \geq 0$ et
 $P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y) \quad (x \geq 0, y \geq 0)$

Théorème 18.42 Une V.A.R. X suit une loi sans mémoire *ssi* $X = 0$ p.s. ou X suit une loi exponentielle

18.3.3 Loi normale

Dans cette section, μ et σ désignent des nombres réels et X désigne une V.A.R. à densité.

Définition 18.43 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Définition 18.44 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Propriété 18.45 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

Propriété 18.46 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$

Pour la suite de cette section, X désigne une V.A.R. de loi normale de paramètres μ et σ^2

Propriété 18.47 $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Propriété 18.48 $E(X) = \mu$

Propriété 18.49 $V(X) = \sigma^2$

densité
fonction de
répartition

Univers image

espérance
variance

Table des matières

1	Avant propos	2
	Bases théoriques	4
2	Logique Séquence 2	5
2.1	Assertions et propositions logiques	5
2.2	Opérateurs	6
2.2.1	Affirmation	6
2.2.2	Négation	7
2.2.3	conjonction	7
2.2.4	Disjonction inclusive	8
2.2.5	Disjonction exclusive	8
2.2.6	Equivalence	9
2.2.7	Implication	9
2.3	Raisonnements classiques	10
2.3.1	Raisonnement par double implication	10
2.3.2	Raisonnement par contraposition	10
2.3.3	Raisonnement direct	10
2.3.4	Raisonnement par équivalences	11
2.3.5	Raisonnement par l'absurde	11
2.3.6	Raisonnement par récurrence	11
3	Sommes, produits, récurrences Séquence 3	13
3.1	Sommes	13
3.1.1	Généralités	13
3.1.2	Identité fondamentale	15
3.1.3	Sommes de Bernoulli	16
3.1.4	Sommes multiples	16
3.2	Produits et factorielles	17
3.2.1	Généralités	17
4	Ensembles et applications Séquence 5	20
4.1	Ensembles	20
4.2	Fonctions et applications	23
4.2.1	Fonctions	24
4.2.2	Applications	24
4.2.3	Injections, surjections et bijections	26
4.3	Combinatoire Séquence 7	27
4.3.1	Cardinal	28
4.3.2	Opérations	29

Ensembles fondamentaux	31
5 Ensemble \mathbb{R} des nombres réels Séquence 4	32
5.1 Ordre réel	32
6 Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes Séquence 18	34
6.1 Forme algébrique	34
6.1.1 Généralités	34
6.1.2 Parties réelles et imaginaires	35
6.1.3 Conjugaison	36
6.2 Forme trigonométrique	36
6.2.1 Module	36
6.2.2 Argument	37
6.2.3 Exponentielle complexe	38
6.2.4 Forme trigonométrique	39
6.3 Trigonométrie	39
6.3.1 cosinus et sinus	39
6.3.2 tangente	40
6.3.3 arctangente	41
Analyse	42
7 Suites Séquence 4	43
7.1 Généralités	43
7.2 Suites fondamentales Séquence 1	45
7.2.1 Suites arithmétiques	45
7.2.2 Suites géométriques	46
7.2.3 Suites arithmético-géométriques	46
7.2.4 Suites vérifiant une récurrence linéaire du second ordre	47
7.3 Suites bornées, minorées, majorées	48
7.4 Suites convergentes	49
7.5 Suites divergeant vers l'infini	51
7.6 Suites monotones	52
7.7 Suites négligeables Séquence 22	53
7.8 Suites équivalentes Séquence 22	54
8 Séries Séquence 23	57
8.1 Généralités	57
8.2 Séries à termes positifs	59
8.3 Séries de référence	59

9	Fonctions réelles (comportement local)	61
9.1	Limites Séquence 6	61
9.1.1	Limites finies	61
9.1.2	Généralisation du concept de limite	62
9.1.3	Opérations	63
9.1.4	Généralisations et opérations	65
9.2	Continuité en un point Séquence 6	66
9.2.1	Généralités	67
9.2.2	Opérations	67
9.3	Dérivée en un point Séquence 12	68
9.3.1	Généralités	68
9.3.2	Opérations	69
9.4	Comparaison des fonctions Séquence 27	71
9.4.1	Fonctions négligeables	71
9.4.2	Fonctions équivalentes	72
9.5	Développements limités Séquence 32 et 33	74
9.5.1	Généralités	74
9.5.2	Opérations	75
9.5.3	Développements limités de référence	75
9.5.4	Formule de Taylor-Young	76
10	Fonctions réelles (comportement global) Séquence 11	78
10.1	Fonctions réciproques	78
10.2	Fonctions minorées, majorées et bornées	78
10.3	Fonctions monotones	78
10.4	Fonctions paires et impaires	80
10.4.1	Généralités	80
10.4.2	Opérations	81
10.5	Fonctions périodiques	81
10.5.1	Généralités	81
10.5.2	Opérations	82
10.6	Fonctions continues	83
10.6.1	Généralités	83
10.6.2	Théorèmes fondamentaux	84
10.6.3	Continuité par morceaux Séquence 16	86
10.7	Fonctions dérivées Séquence 12	87
10.7.1	Généralités	88
10.7.2	Opérations	88
10.7.3	Monotonie	89
10.7.4	Théorèmes fondamentaux	90
10.7.5	Fonctions de classe \mathcal{C}^n Séquence 27	90

10.7.6	Opérations sur les fonctions de classe C^n Séquence 27	92
10.8	Étude globale des fonctions d'une variable	93
10.9	Recherche d'extrema Séquence 34, 35, et 36	94
10.10	Fonctions convexes Séquence 34, 35, et 36	94
11	Intégration	95
11.1	Primitives Séquence 16	95
11.2	Intégrales sur un segment Séquence 16 et 17	96
11.2.1	Intégrale des fonctions continues	96
11.2.2	Intégrale des fonctions continues par morceaux	97
11.2.3	Propriétés	97
11.2.4	Sommes de Riemann	99
11.3	Intégrales sur un intervalle quelconque Séquence 28	99
11.3.1	Intégrale généralisée simple	99
11.3.2	Intégrales des fonctions positives	100
11.3.3	Intégrales généralisées complexes	100
11.3.4	théorème fondamentaux	101
11.3.5	Intégrales de référence	102
Algèbre		103
12	Polynômes Séquence 19	104
12.1	Forme additive	104
12.1.1	Généralités	104
12.1.2	Opérations algébriques	105
12.1.3	Dérivation	106
12.1.4	Substitution	106
12.1.5	Degré	107
12.2	Forme multiplicative	108
12.2.1	Diviseurs	108
12.2.2	Racines et multiplicités	109
12.2.3	Décomposition en produit	110
13	Systèmes linéaires Séquence 9	112
13.1	Systèmes linéaires	112
13.2	Opérations élémentaires	113
13.3	Résolution	115

14	Matrices Séquence 13	117
14.1	Matrices	117
14.2	Opérations	119
14.2.1	Sommes	119
14.2.2	Multiples	119
14.2.3	Produits	119
14.2.4	Transposition	121
14.2.5	Inverse	122
14.2.6	Rang	122
14.3	Matrices carrées	123
14.3.1	† Trace	123
14.3.2	Matrices diagonales	124
14.3.3	Matrices triangulaires supérieures	124
14.3.4	Matrices symétriques	125
14.3.5	Matrices anti-symétriques	125
14.3.6	Matrices qui commutent	126
14.4	Matrices et systèmes linéaires	126
14.5	Rang d'une matrice	127
14.5.1	Généralités	127
15	Espaces vectoriels Séquence 10	128
15.1	Espaces vectoriels	128
15.1.1	Loi interne	128
15.1.2	Loi externe	129
15.1.3	Espace vectoriel	130
15.2	Sous-espaces vectoriels	131
15.2.1	Généralités	131
15.2.2	Espaces vectoriels engendrés	132
15.2.3	Familles de vecteurs	133
15.3	Espaces vectoriels de dimension finie Séquence 20 et 21	134
15.3.1	Dimension	135
15.3.2	Bases canoniques et dimensions de référence	136
15.3.3	Rang d'une famille de vecteurs	137
15.4	Produits cartésiens, sommes et supplémentaires Séquence 20 et 21	138
15.4.1	Produit cartésien	138
15.4.2	Sommes et supplémentaires	139
15.5	Applications linéaires Séquence 25 et 26	139
15.5.1	Applications linéaires	140
15.5.2	Noyau et image	142
15.5.3	Homothétie, projections, symétries.	143
15.5.1	Rang	144

15.5.2	Matrices	146
Probabilités		149
16	Espaces probabilisés <i>Séquence 7 et 8</i>	150
16.1	Expériences aléatoires	150
16.2	<i>Tribus</i> <i>Séquence 24</i>	150
16.3	Espaces probabilisables	151
16.4	Espaces probabilisés	152
16.5	Limite monotone <i>Séquence 24</i>	154
16.6	Probabilités conditionnelles	154
16.7	Indépendance	157
17	Variables aléatoires réelles <i>Séquence 14</i>	158
17.1	Généralités	158
17.2	Espérance et variables aléatoires discrètes <i>Séquence 14 et 24</i>	160
17.3	Espérance et variables aléatoires à densité <i>Séquence 30</i>	162
17.4	Espérance	163
17.5	Variance	165
17.6	Ecart type	165
17.7	Approximations <i>Séquence 34, 35 et 36 ?</i>	166
17.7.1	Théorèmes fondamentaux	166
17.7.2	Convergence en probabilité	167
17.7.3	Convergence en loi	167
18	Lois usuelles <i>Séquence 14</i>	169
18.1	Lois discrètes finies	169
18.1.1	Loi certaine	169
18.1.2	Loi uniforme	170
18.1.3	Loi de Bernoulli	170
18.1.4	Loi binomiale	171
18.2	Lois discrètes infinies <i>Séquence 24</i>	171
18.2.1	Loi géométrique	172
18.2.2	Loi de Poisson	172
18.3	Lois à densité <i>Séquence 30</i>	173
18.3.1	Loi uniforme (continue)	173
18.3.2	Loi exponentielle	174
18.3.3	Loi normale	175