# Corrigé Maths HEC 2 ECS 2015

## Partie I : Probabilité de surpassement et espérance

1.a. Nous savons que si X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, alors pour tout $x > 0$, $\mathrm{S_X}(x) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$. Ainsi pour $\mathrm{A} > 0$,

$$\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{S_X}(x)dx = \int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\mathrm{A}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda \mathrm{A}}}{\lambda} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}.$$

Et donc
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(x)dx = \frac{1}{\lambda} = \mathrm{E(X)}.$$

1.b. Rappelons que $\mathrm{S_X} = 1 - \mathrm{F_X}$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(x)dx$ représente l'aire entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe représentative de F.

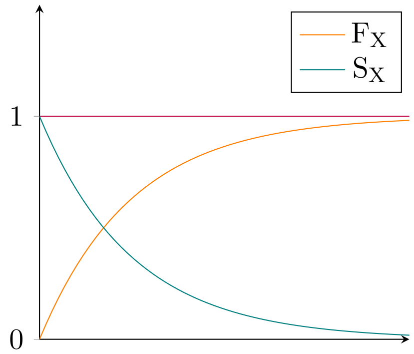


FIGURE 1 – Lien entre $\mathrm{S_X}$ et $\mathrm{F_X}$.

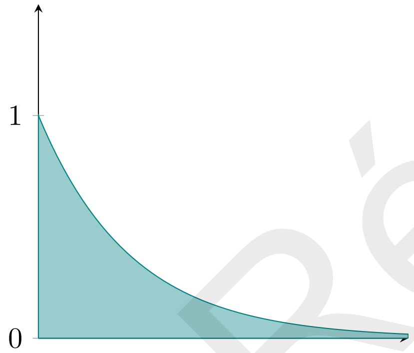


FIGURE 2 – L'intégrale de $\mathrm{S_X}$.

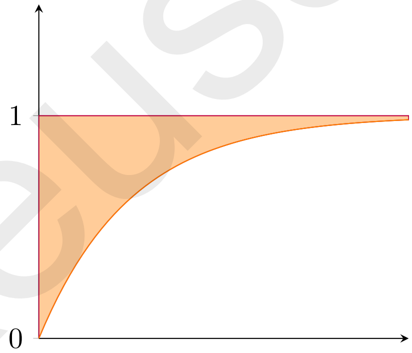


FIGURE 3 – E(X) et $\mathrm{F_X}$.

2.a. La fonction $h$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $h(x) \sim \frac{1}{x^2}$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (intégrale de Riemann), par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$, et donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$.

2.b. Supposons que deux tels réels $c$ et $d$ existent. Alors pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2} \Rightarrow 1 = c(x+2) + d(x+1) = (c+d)x + (2c+d).$$

Deux fonctions polynomiales coïncident sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, donc nécessairement $\begin{cases} c+d=0 \\ 2c+d=1 \end{cases}$. Après résolution, on obtient $\boxed{c = 1, d = -1.}$

On en déduit qu'une primitive de $h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ est $\mathrm{H} : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x+2) = \boxed{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$.

2.c. La fonction $f_0$ est positive sur $\mathbf{R}$, et continue sauf éventuellement en 0.
De plus, pour $\mathrm{A} > 0$, on a

$$\int_0^{\mathrm{A}} f_0(x)dx = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^{\mathrm{A}} h(x)dx = \frac{1}{\ln(2)}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^{\mathrm{A}} = \frac{1}{\ln 2}\left(\ln\left(\frac{\mathrm{A}+1}{\mathrm{A}+2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Lorsque $\mathrm{A} \to +\infty$, alors $\frac{\mathrm{A}+1}{\mathrm{A}+2} \to 1$ et donc $\ln\left(\frac{\mathrm{A}+1}{\mathrm{A}+2}\right) \to 0$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)dx = \int_0^{+\infty} f_0(x)dx = -\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1.$$

Ainsi, $f_0$ est une densité de probabilité.

3.a. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_0(x)dx$ converge absolument.

Or, au voisinage de $+\infty$, $xf_0(x) \sim \frac{1}{\ln(2)}\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x\ln(2)}$.

Mais $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, et donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\int_1^{+\infty} xf_0(x)dx$. Par conséquent, $\boxed{\text{X n'admet pas d'espérance.}}$

3.b. Par définition, on a $\mathrm{S_X}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x) = \int_x^{+\infty} f_0(t)dt$.

Mais le même calcul que celui effectué à la question 2.c prouve que

$$\mathrm{S_X}(x) = \int_x^{+\infty} f_0(t)dt = -\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \boxed{\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).}$$

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ et $\frac{1}{x+1} \to 0$. Donc

$$\mathrm{S_X}(x) = \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln(2)}.$$

3.c. Nous savons que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, et donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\int_1^{+\infty} \mathrm{S_X}(x)dx$, et donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(x)dx \text{ diverge.}}$

4.a. Par définition de $\mathrm{S_X}$, on a $\mathrm{S_X} = 1 - \mathrm{F_X}$.

Or, comme toute fonction de répartition, $\mathrm{F_X}$ est croissante de limite égale à 1 en $+\infty$, donc $\mathrm{S_X}$ est décroissante sur $\mathbf{R}$, de limite nulle en $+\infty$.

4.b. Nous savons que $\mathrm{F_X}$, comme toute fonction de répartition, est continue à droite en tout point.

Donc $\mathrm{S_X} = 1 - \mathrm{F_X}$ est également continue à droite en tout point.

$\mathrm{S_X}$ est continue en 0 si et seulement si elle y est continue à gauche. Or, pour $x < 0$, on a $\mathrm{S_X}(x) = 1$ car X est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

Donc $\mathrm{S_X}$ est continue à gauche en 0 si et seulement

$$1 = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{S_X}(x) = \mathrm{S_X}(0).$$

Or, $\mathrm{S_X}(0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > 0)$, et donc $\mathrm{S_X}$ est continue à gauche si et seulement si $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 0) = 1$.

Mais $1 = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} > 0)$, et donc $\boxed{\mathrm{S_X} \text{ est continue à gauche si et seulement si } \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 0.}$

5.a. Si X admet une densité, alors $\mathrm{F_X}$ est continue, et donc $\mathrm{S_X} = 1 - \mathrm{F_X}$ est également continue.

De plus, pour $x \geq 0$, on a

$$\mathrm{S_X}(x) = 1 - \mathrm{F_X}(x) = 1 - \int_{-\infty}^x f(t)dt = 1 - \int_0^x f(t)dt.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, et donc $\mathrm{S_X}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. De plus, on a alors, pour $x > 0$, $\mathrm{S'_X}(x) = -f(x)$.

5.b. Pour $x \in ]0, 1]$, on a $0 \leq xf(x) \leq f(x)$.

Or $f$ est une densité, de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge, et donc il en est de même de $\int_0^1 f(x)dx$.

Par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\int_0^1 xf(x)dx$.

5.c. Soit $\varepsilon \in ]0, \mathrm{A}]$. Alors sur le segment $[\varepsilon, \mathrm{A}]$, les fonctions $u = \mathrm{S_X}$ et $v = x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ : on peut donc procéder à une intégration par parties.

$$\int_\varepsilon^{\mathrm{A}} \mathrm{S_X}(x)dx = [x\mathrm{S_X}(x)]_\varepsilon^{\mathrm{A}} - \int_\varepsilon^{\mathrm{A}} x\mathrm{S'_X}(x)dx = \mathrm{AS_X(A)} - \varepsilon \mathrm{S_X}(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{\mathrm{A}} xf(x)dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{AS_X(A)} + \int_0^{\mathrm{A}} xf(x)dx.$$

En effet, la fonction $S_X$ est continue, de sorte que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon S_X(\varepsilon) = 0\times S_X(0) = 0$. Par conséquent, $\displaystyle\int_0^A S_X(x)dx$ converge et

$$\int_0^A S_X(x)dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x)dx.$$

5.d. Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ converge, alors la fonction $S_X$ étant à valeurs positives, pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A S(x)dx \leq \int_0^{+\infty} S_X(x)dx$. Et alors

$$\forall A > 0, \int_0^A xf(x)dx = \int_0^A S_X(x)dx - AS_X(A) \leq \int_0^A S_X(x)dx \leq \int_0^{+\infty} S_X(x)dx.$$

Puisque $x \mapsto xf(x)$ est positive sur $\mathbf{R}_+$, la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_0^A xf(x)dx$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et nous venons de prouver qu'elle est majorée. Par conséquent, elle admet une limite finie en $+\infty$, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge (et donc converge absolument car il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive).
On en déduit que $\boxed{\text{X admet une espérance.}}$

5.e. Soit $A \geq 0$. Alors pour tout $x \in [A, +\infty[$, $xf(x) \geq Af(x)$, et alors par croissance de l'intégrale,

$$\int_A^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_A^{+\infty} Af(x)dx = A\int_A^{+\infty} f(x)dx = AP(X > A) = AS_X(A).$$

5.f. Si X admet une espérance, alors $\displaystyle\int_A^{+\infty} xf(x)dx \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car il s'agit du reste d'une intégrale convergente.

Et alors par le théorème des gendarmes, $AS_X(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} S_X(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A S_X(x)dx = \lim_{A\to+\infty} AS_X(A) + \lim_{A\to+\infty}\int_0^A xf(x)dx = 0 + \int_0^{+\infty} xf(x)dx = E(X).$$

Inversement, si $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ converge, alors par 5.d, X admet une espérance, et donc nous venons de prouver que

$$\int_0^{+\infty} S_X(x)dx = E(X).$$

Par conséquent, X admet une espérance **si et seulement si** $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ converge et alors

$$\int_0^{+\infty} S_X(x)dx = E(X).$$

6.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$S_X(k) = P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i) = \sum_{i=k+1}^{n} P(X = i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=k+1}^{n} P(X = i) + P(X \geq n+1).$$

Alors il vient

$$\sum_{k=0}^{n} S_X(k) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k+1}^{n} P(X = i) + P(X \geq n+1)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= && (n+1)\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=i) \\
&\underset{i \geq k+1 \Leftrightarrow k \leq i-1}{=} && (n+1)\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq n+1) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=i) \\
&= && \boxed{(n+1)\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq n+1) + \sum_{i=1}^{n} i\mathrm{P}(\mathrm{X}=i)}
\end{aligned}$$

6.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k).$$

Ainsi, la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ est croissante et majorée, donc elle converge.

Par conséquent, la série de terme général $k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ converge, et étant à termes positifs, elle converge absolument. Donc X admet une espérance.

6.c. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$0 \leq (n+1)\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k).$$

Or si X admet une espérance, la série de terme général $k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ converge, de sorte que la suite de ses restes tend vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = 0.$$

Et alors par le théorème des gendarmes, $(n+1)\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq n+1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k) = \lim_{n \to +\infty} (n+1)\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq n+1) + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{E}(\mathrm{X}).$$

Inversement, si $\sum_k \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k)$ converge, alors X admet une espérance, et donc nous venons de prouver que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k) = \mathrm{E}(\mathrm{X}).$$

Ainsi, $\sum_k \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k)$ converge si et seulement si X admet une espérance et alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k) = \mathrm{E}(\mathrm{X}).}$$

6.d.i. Soit $x \in [0, \mathrm{N}[$. Alors X étant à valeurs entières, en notant $k = \lfloor x \rfloor$, on a

$$\mathrm{S}_{\mathrm{X}}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > k) = \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k).$$

Donc la fonction $\mathrm{S}_{\mathrm{X}}$ vérifie $\mathrm{S}_{\mathrm{X}}(x) = \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(\lfloor x \rfloor)$. Ou encore :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in [k, k+1[, \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(x) = \mathrm{S}_{\mathrm{X}}(k).$$

Ainsi, il vient

$$\int_0^{\mathrm{N}} \mathrm{S_X}(x)dx = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \int_k^{k+1} \mathrm{S_X}(x)dx = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \int_k^{k+1} \mathrm{S_X}(k)dx = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{S_X}(k)dx = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{S_X}(k).$$

Notons que ce résultat est encore valable pour $\mathrm{N} = 0$.

6.d.ii. D'après ce qui précède, pour $\mathrm{A} \geq 1$, on a

$$\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{S_X}(x)dx = \int_0^{\lfloor \mathrm{A} \rfloor} \mathrm{S_X}(x)dx + \int_{\lfloor \mathrm{A} \rfloor}^{\mathrm{A}} \mathrm{S_X}(x)dx = \int_0^{\lfloor \mathrm{A} \rfloor} \mathrm{S_X}(x)dx + \int_{\lfloor \mathrm{A} \rfloor}^{\mathrm{A}} \mathrm{S_X}(\lfloor \mathrm{A} \rfloor)dx = \sum_{k=0}^{\lfloor \mathrm{A} \rfloor -1} \mathrm{S_X}(k) + (\mathrm{A} - \lfloor \mathrm{A} \rfloor)\mathrm{S_X}(\lfloor \mathrm{A} \rfloor).$$

Mais $0 \leq \mathrm{A} - \lfloor \mathrm{A} \rfloor \leq 1$, et $\lim\limits_{\mathrm{A} \to +\infty} \mathrm{S_X}(\lfloor \mathrm{A} \rfloor) = 0$ (car la série de terme général $\mathrm{S_X}(k)$ converge, et donc son terme général tend vers 0). On en déduit que

$$\lim_{\mathrm{A} \to +\infty} (\mathrm{A} - \lfloor \mathrm{A} \rfloor)\mathrm{S_X}(\lfloor \mathrm{A} \rfloor) = 0.$$

Alors, en passant à la limite, il vient

$$\lim_{\mathrm{A} \to +\infty} \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{S_X}(x)dx = \lim_{\mathrm{A} \to +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \mathrm{A} \rfloor -1} \mathrm{S_X}(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S_X}(k) = \boxed{\mathrm{E(X)}.}$$

## Partie II : Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple.

7. *Exemple*

7.a $\Phi$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ car sa dérivée $\varphi$ y est strictement positive. De plus, $\Phi$ est continue et $\lim\limits_{t \to -\infty} \Phi(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = 1$, donc par le théorème de la bijection, $\Phi$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $]0, 1[$.

7.b $w_\alpha$ est continue sur $]0, 1[$ car composée de fonctions continues.
De plus, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \Psi(x) - \Psi(\alpha) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} \Phi(t) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} w_\alpha(x) = 0 = w_\alpha(0)$, de sorte que $w_\alpha$ est continue en 0.
De même, $\lim\limits_{x \to 1^-} \Psi(x) - \Psi(\alpha) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} w_\alpha(x) = 1 = w_\alpha(1)$. Ainsi $w_\alpha$ est continue en 1.
Par conséquent $\boxed{w_\alpha \text{ est continue sur } [0, 1].}$ Enfin, $\Psi$ est dérivable sur $]0, 1[$ car il s'agit de la bijection réciproque d'une fonction dont la dérivée ne s'annule jamais. Par composition de fonctions dérivables, $w_\alpha$ est dérivable sur $]0, 1[$.

7.c D'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\forall x \in ]0, 1[, w'_\alpha(x) = \Psi'(x)\Phi'(\Psi(x) - \Psi(\alpha) = \frac{1}{\varphi(\Psi(x))}\varphi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) = e^{\Psi(x)^2/2} e^{-(\Psi(x) - \Psi(\alpha))^2/2} = e^{\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}.$$

7.d L'équation de la tangente à la courbe représentative de $w_\alpha$ au point d'abscisse $\alpha$ est

$$y = w'_\alpha(\alpha)(x - \alpha) + w_\alpha(\alpha) = e^{\frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}(x - \alpha) + \Phi(0) = e^{\frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}(x - \alpha) + \frac{1}{2}.$$

7.e Nous avons déjà vérifié que $w_\alpha$ est continue sur $[0, 1]$, et nous avons trivialement $w_\alpha(0) = 0$ et $w_\alpha(1) = 1$.
Par positivité de l'exponentielle, on a évidemment $w'_\alpha(x) > 0$ pour $x \in ]0, 1[$, et donc $w_\alpha$ est strictement croissante sur $]0, 1[$. Étant continue, elle est alors croissante sur $[0, 1]$.
Puisque $\Psi$ est la bijection réciproque d'une fonction strictement croissante, elle est strictement croissante.
Or, $\Psi(\alpha) < 0$, de sorte que

$$x \mapsto \Psi(x)\Psi(\alpha) - \frac{\Psi(\alpha)^2}{2}$$

est décroissante.
Par croissance de l'exponentielle, $w'_\alpha$ est décroissante sur $]0,1[$. On en déduit donc que $w_\alpha$ est concave sur $]0,1[$.
Ceci signifie que $\forall (x,y) \in ]0,1[^2, \forall \lambda \in [0,1], w_\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda w_\alpha(x) + (1-\lambda) w_\alpha(y)$.
Par continuité de $w_\alpha$, en fixant $\lambda$ et en faisant tendre $x$ vers 0, cette relation est toujours vérifiée pour $x = 0$ et $y \in ]0,1[$. Sur le même principe, on vérifie en fait qu'elle reste valable pour tous $(x,y) \in [0,1]^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$.
Et donc $w_\alpha$ est bien concave sur $[0,1]$.
En conclusion, $\boxed{w_\alpha \text{ est bien une fonction de distorsion.}}$

8.a D'après le théorème de transfert, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}} dt$ converge (absolument, mais il s'agit d'une fonction à valeurs positives).
Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$e^t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}} = e^{t-\frac{t^2}{2}+\mu t-\frac{\mu^2}{2}} = e^{-\frac{(t-(\mu+1))^2}{2}+\mu+\frac{1}{2}}.$$

Procédons alors au changement de variables $u = t-(\mu+1)$, qui réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-(\mu+1))^2}{2}+\mu+\frac{1}{2}} dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{\mu+\frac{1}{2}} du$$

sont de même nature. Or, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{\mu+\frac{1}{2}} du = e^{\mu+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge et vaut $e^{\mu+\frac{1}{2}}$.
Donc X admet une espérance et

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}) = e^{\mu+\frac{1}{2}}.}$$

8.b Par définition de X, pour tout réel $x > 0$, on a (la fonction ln étant croissante)

$$\mathrm{S_X}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x) = \mathrm{P}(e^{\mathrm{Y}} > x) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} > \ln(x))$$

par croissance de la fonction ln. Or, $\mathrm{P}(\mathrm{Y} > x) = 1 - \Phi(\ln x) = \Phi(-\ln x)$. Et alors

$$w_\alpha(\mathrm{S_X}(x)) = \Phi\left(\Psi(\Phi(-\ln(x))) - \Psi(\alpha)\right) = \Phi(-\ln x - \Psi(\alpha)).$$

D'autre part, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}e^{-\Psi(\alpha)} > x) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X} > xe^{\Psi(\alpha)}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} > \ln(x) + \Psi(\alpha)) = 1 - \Phi(\ln(x) + \Psi(\alpha)) = \Phi(-\ln x - \Psi(\alpha)).$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall x > 0, w_\alpha(\mathrm{S_X}(x)) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}e^{-\Psi(\alpha)} > x\right).}$$

8.c Par définition de l'espérance corrigée, sous réserve de convergence,

$$\mathrm{E}_{w_\alpha}(\mathrm{X}) = \int_0^{+\infty} w_\alpha(\mathrm{S_X}(x))dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}e^{-\Psi(\alpha)} > x)dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > e^{\Psi(\alpha)}x)dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(e^{\Psi(\alpha)}x)dx.$$

Procédons au changement de variables $u = xe^{\Psi(\alpha)}$, qui réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur lui-même. Alors les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(e^{\Psi(\alpha)}x)dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(u)e^{-\Psi(\alpha)}du$$

sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.
Mais X admet une espérance d'après la question 8.a, de sorte que par la question 5.f, la seconde intégrale converge et vaut $e^{-\Psi(\alpha)}\mathrm{E}(\mathrm{X})$. Ainsi, $\mathrm{E}_{w_\alpha}(\mathrm{X})$ existe et vaut

$$\mathrm{E}_{w_\alpha}(\mathrm{X}) = e^{-\Psi(\alpha)}\mathrm{E}(\mathrm{X}) = e^{-\Psi(\alpha)}e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

Notons que puisque $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, alors $\Psi(\alpha) \leq 0$ et donc $e^{-\Psi(\alpha)} > 1$. Ceci est bien cohérent avec le résultat (à venir) de la question 11.a.

9.a `p` et `q` sont deux vecteurs lignes à 97 colonnes.
`p` contient alors les $0.02 + 0.01 \times k, k \in [\![0, 96]\!]$. Et `q` contient les $\Psi(0.02 + 0.01 \times k) - \Psi(\alpha), k \in [\![0, 96]\!]$.

9.b La ligne (4) peut être complétée en

```
wa = cdfnor("PQ",q,0,1)
```

9.c Si $\alpha < \alpha'$ sont deux réels de $]0, 1[$, alors par stricte croissance de $\Psi$, on a $\Psi(\alpha) < \Psi(\alpha')$. Et donc

$$\forall x \in ]0, 1[, \Psi(x) - \Psi(\alpha') < \Psi(x) - \Psi(\alpha)$$

ce qui, par stricte croissance de $\Phi$, implique que $w_{\alpha'}(x) < w_\alpha(x)$.
Par conséquent, la courbe du dessus correspond à $\alpha = 0.2$.

9.d Commençons par donner une méthode pour tracer *approximativement* ces tangentes avec `Scilab`.
En remplaçant la ligne (2) par `p = [0.01:0.01:0.99]`, nous pouvons ajouter deux points à chacune des courbes, ceux d'abscisses respectives 0.01 et 0.99.
Ensuite, en traçant la droite passant par le point d'abscisse 0.01 et $(0, 0)$, on obtient une corde de $w_\alpha$, qui doit être une bonne approximation de la tangente en $(0, 0)$ (rappelons que le coefficient directeur de la tangente est la limite du taux d'accroissement). On procède de même avec le point d'abscisse 0.99 et le point $(1, 1)$.
Toutefois, ceci ne nous garantit pas une précision suffisante... La précision peut tout de même être améliorée en réduisant le pas, par exemple en passant de 0.01 à 0.005, voire moins.

Donnons à présent une justification mathématique.
• <u>En $(0, 0)$</u> : d'après l'inégalité des pentes (la fonction $w_\alpha$ est concave sur $[0, 1]$), on a, pour tout $x \in ]0, 1[$,

$$\frac{w_\alpha(x) - w_\alpha(0)}{x} \geq \frac{w_\alpha(x) - w_\alpha(x/2)}{x/2} < 0.$$

Mais $w_\alpha$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, on a (par décroissance et positivité de $w'_\alpha$)

$$\forall x \in ]0, 1[, w_\alpha(x) - w_\alpha(x/2) = \int_{x/2}^{x} w'_\alpha(t) dt \geq w'_\alpha(x) \times \frac{x}{2}.$$

Et alors

$$\frac{w_\alpha(x) - w_\alpha(0)}{x} \geq w'_\alpha(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit que le taux d'accroissement de $w_\alpha$ en 0 tend vers $+\infty$, et donc $w_\alpha$ n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(0, 0)$.
• <u>En $(1, 1)$</u> la fonction $w_\alpha$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. De plus, sur $[1 - h, 1[$, sa dérivée est majorée par $w'_\alpha(1 - h)$ car $w'_\alpha$ est décroissante. Donc par le théorème des accroissements finis, on a

$$\forall h \in ]0, 1[, |w_\alpha(1 - h) - w_\alpha(1)| \leq w'_\alpha(1 - h)h.$$

Soit encore

$$\forall h \in ]0, 1[, \left| \frac{w_\alpha(1 - h) - w_\alpha(1)}{h} \right| \leq w'_\alpha(1 - h) \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $w_\alpha$ est dérivable en 1, de dérivée égale à 0. La tangente de $w_\alpha$ en $(1, 1)$ est alors la droite d'équation $y = 1$.

9.e Lorsque $\alpha \to 0$, $\Psi(\alpha) \to -\infty$. Et alors pour $x \in ]0, 1[$, $w_\alpha(x) = \Phi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) \to 1$.
Ainsi, la courbe représentative de $w_\alpha$ «se rapproche» lorsque $\alpha \to 0$ de la courbe représentative de $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

**Partie III : Sous-additivité des espérances corrigées**

10.a Il s'agit de la définition de la concavité : $g$ est concave sur $[0,1]$ si et seulement si pour tous $a, b \in [0,1]^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$,

$$g(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda g(a)(1-\lambda)g(b).$$

En prenant $a = 1 - \frac{1}{n}, b = \frac{1}{n}$ et $\lambda = x$, on obtient

$$\boxed{g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1-\frac{1}{n}\right) + (1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).}$$

10.b Par définition d'une fonction de distorsion, $g$ est continue sur $[0,1]$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(1-\frac{1}{n}\right) = g(1) = 1$.

Et de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = g(0) = 0$.

Enfin, on a

$$\lim_{n\to+\infty} g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) = g(x).$$

Donc en passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, il vient $\boxed{g(x) \geq x.}$

10.c Posons $\lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+b-a}$. Alors il est évident que $\lambda \in [0,1]$ car $b - a \geq 0$ et $\varepsilon > 0$.
De plus, on a alors

$$\lambda a + (1-\lambda)(b-\varepsilon) = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon+b-a} + (b-a)\frac{\varepsilon+b-a}{(b+\varepsilon)} = \frac{b^2-ab+b\varepsilon}{\varepsilon+b-a} = b\frac{\varepsilon+b-a}{\varepsilon+b-a}.$$

Et de même, on a

$$(1-\lambda)a + \lambda(b+\varepsilon) = a\frac{b-a}{\varepsilon+b-a} + \frac{\varepsilon(b+\varepsilon)}{\varepsilon+b-a} = \frac{ab-a^2+\varepsilon b+\varepsilon^2}{\varepsilon+b-a} = (a+\varepsilon)\frac{\varepsilon+b-a}{\varepsilon+b-a} = a+\varepsilon.$$

Donc il existe bien un réel $\lambda \in [0,1]$ vérifiant les deux conditions requises.
En appliquant deux fois la définition de la concavité de $g$ telle que rappelée dans la question 10.a, il vient

$$g(b) \geq \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b+\varepsilon) \text{ et } g(a+\varepsilon) \geq (1-\lambda)g(a) + \lambda g(b+\varepsilon).$$

En ajoutant ces deux inégalités, on obtient

$$g(b) + g(a+\varepsilon) \geq g(a) + g(b+\varepsilon)$$

soit encore

$$\boxed{g(b+\varepsilon) - g(a+\varepsilon) \leq g(b) - g(a).}$$

11.a Pour $x \in \mathbf{R}$, d'après la question 10.b, on a $0 \leq \mathrm{S_X}(x) \leq g(\mathrm{S_X}(x))$.
Or puisque nous avons fait l'hypothèse que $\mathrm{E}_g(\mathrm{X})$ existe, c'est donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x))dx$ converge. Alors par critère de comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(x)dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(x)dx \leq \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x))dx.$$

Mais par la question 5.f, X admet alors une espérance et

$$\boxed{\mathrm{E(X)} = \int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(x)dx \leq \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x))dx = \mathrm{E}_g(\mathrm{X}).}$$

11.b Si X est la variable aléatoire certaine égale à $a \geq 0$, alors $\quad \mathrm{S_X}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

Et alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S_X}(x)dx$ converge et

$$\mathrm{E}_g(\mathrm{X}) = \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x))dx = \int_0^a g(\mathrm{S_X}(x))dx = \int_0^a 1dx = a = \mathrm{E(X)}.$$

11.c Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathrm{S}_{r\mathrm{X}+s}(x) = \mathrm{P}(r\mathrm{X} + s > x) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X} > \frac{x-s}{r}\right) = \mathrm{S_X}\left(\frac{x-s}{r}\right).$$

Le changement de variables $u = \frac{x-s}{r}$ réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $[0;+\infty[$ sur $\left[-\frac{s}{r},+\infty\right[$ avec $rdu = dx$. Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\left(\mathrm{S_X}\left(\frac{x-s}{r}\right)\right)dx$ et $\displaystyle r\int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(u))du$ sont de même nature.

Mais puisque $\mathrm{E}_g(\mathrm{X})$ existe par hypothèse, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x))dx$ converge.

De plus, la fonction $\mathrm{S_X}$ est constante égale à 1 sur $\left[-\frac{s}{r}, 0\right]$, de même que la fonction $g \circ \mathrm{S_X}$. Donc $\displaystyle\int_{-\frac{s}{r}}^0 g(\mathrm{S_X}(u))du$ converge et vaut $\frac{s}{r}$. Ceci prouve que $\displaystyle\int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x))dx$ converge et alors

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_g(r\mathrm{X}+s) &= \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{r\mathrm{X}+s}(x))dx = \int_0^{+\infty} g\left(\mathrm{S_X}\left(\frac{x-s}{r}\right)\right)dx \\ &= r\int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(u))du = r\left(-\frac{s}{r} + \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(u))du\right) = r\mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + s.\end{aligned}$$

11.d Si $\mathrm{P}(0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}) = 1$, alors pour tout $x$ réel, on a $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq x) \leq \mathrm{P}(\mathrm{W} \geq x)$.
En effet, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}], \overline{[0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}]}\}$, on obtient

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} > x) = \mathrm{P}([\mathrm{T} > x] \cap [0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}]) + \mathrm{P}([\mathrm{T} > x] \cap \overline{[0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}]}).$$

Or, $\mathrm{P}([\mathrm{T} > x] \cap \overline{[0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}]}) \leq \mathrm{P}(\overline{[0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}]}) = 0$ et $[\mathrm{T} > x] \cap [0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}] \subset [\mathrm{W} > x]$ donc $\mathrm{P}([\mathrm{T} > x] \cap [0 \leq \mathrm{T} \leq \mathrm{W}]) \geq \mathrm{P}(\mathrm{W} > x)$.
Et alors par croissance de $g$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(\mathrm{S_T}(x)) \leq g(\mathrm{S_W}(x))$.
Ainsi, si $\mathrm{E}_g(\mathrm{T})$ et $\mathrm{E}_g(\mathrm{W})$ existent, il vient (par croissance de l'intégrale)

$$\mathrm{E}_g(\mathrm{T}) = \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_T}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_W}(x))dx = \mathrm{E}_g(\mathrm{W}).$$

12. Par hypothèse, Y est presque sûrement inférieure à B. Et donc pour $x \leq \mathrm{B}$, alors $\mathrm{S_X}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x) \leq 1$ et pour $x \geq \mathrm{B}$, $\mathrm{S_X}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x) = 0$.
*Pour être tout à fait rigoureux, il aurait fallu, comme à la question 11.d, utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $\{[0 \leq \mathrm{Y} \leq \mathrm{B}], \overline{[0 \leq \mathrm{Y} \leq \mathrm{B}]}\}$, *mais nous ne le ferons pas afin de ne pas alourdir la rédaction et admettrons directement ce résultat.*
Ainsi, si $f$ désigne la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, \mathrm{B}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors pour tout $x > 0, 0 \leq \mathrm{S_X}(x) \leq f(x)$. Et donc par croissance de $g$, $\forall x > 0, 0 \leq g(\mathrm{S_X}(x)) \leq g(f(x))$.
Mais $g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, \mathrm{B}] \\ 0 & \text{si } x > \mathrm{B} \end{cases}$. Il est alors évident que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(f(x))dx = \mathrm{B}$. Par domination, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x))dx$ existe et de plus

$$\mathrm{E}_g(\mathrm{X}) = \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(f(x))dx = \mathrm{B}.$$

Si $\mathrm{X} + \mathrm{Y} > x$, alors $\mathrm{X} > x - \mathrm{Y} \geq x - \mathrm{B}$. Donc $[\mathrm{X} + \mathrm{Y} > x] \subset [\mathrm{X} > x - \mathrm{B}]$, et par croissance de P, il vient alors $0 \leq \mathrm{S_{X+Y}}(x) \leq \mathrm{S_X}(x - \mathrm{B})$.

Et donc $\forall x \in \mathbf{R}, 0 \leq g(\mathrm{S_{X+Y}}(x)) \leq g(\mathrm{S_X}(x - \mathrm{B}))$.
Par définition, $\mathrm{E}_g(\mathrm{X} + \mathrm{Y})$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_{X+Y}}(x))dx$ converge.
Mais en procédant au changement de variables $u = x - \mathrm{B}$, qui réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]-\mathrm{B}, +\infty[$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x - \mathrm{B}))dx \text{ et } \int_{-\mathrm{B}}^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(u))du$$

sont de même nature, et en cas de convergence sont égales. Or

$$\int_{-\mathrm{B}}^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(u))du = \int_{-\mathrm{B}}^{0} g(\mathrm{S_X}(u))du + \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(u))du = \int_{-\mathrm{B}}^{0} 1du + \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) = \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{B}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x - \mathrm{B}))dx$ converge et vaut $\mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{B}$.
Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_{X+Y}}(x))dx$ converge et

$$\mathrm{E}_g(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_{X+Y}}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S_X}(x - \mathrm{B}))dx = \boxed{\mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{B}.}$$

13.a. Pour $n = 0$, on a $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 0$ car Y est presque sûrement constante, égale à 0. Donc, d'après 11.b, $\mathrm{E}_g(\mathrm{Y}) = 0$.
Et alors nous avons prouvé à la question 12 que

$$\mathrm{E}_g(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + 0 = \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(\mathrm{Y}).$$

13.b.i. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $[\mathrm{Z} = 0], [\mathrm{Z} > 0]$ (qui est bien un système (quasi)-complet d'événements car Z est une variable aléatoire à valeurs (presque sûrement) positives. Alors pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{S_{X+Z}}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Z} > x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Z} > x | \mathrm{Z} = 0)\mathrm{P}(\mathrm{Z} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Z} > x | \mathrm{Z} > 0)\mathrm{P}(\mathrm{Z} > 0) =$$
$$(1 - p)\mathrm{P}(\mathrm{X} > x | \mathrm{Z} = 0) + p\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}>0]}(\mathrm{X} + \mathrm{Z} > x) = p\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}=0]}(\mathrm{X} > x) + p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X+Z}}(x).$$

13.b.ii. Toujours avec la formule des probabilités totales appliquée avec le même système complet d'événements, on obtient :

$$\mathrm{S_X}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x | \mathrm{Z} = 0)\mathrm{P}(\mathrm{Z} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} > x | \mathrm{Z} > 0)\mathrm{P}(\mathrm{Z} > 0) = (1 - p)\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}=0]}(\mathrm{X} > x) + p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X}}(x).$$
$$\mathrm{S_Z}(x) = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{Z} > x | \mathrm{Z} = 0)}_{=0}\mathrm{P}(\mathrm{Z} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{Z} > x | \mathrm{Z} > 0)\mathrm{P}(\mathrm{Z} > 0) = p\mathrm{S}^*_{\mathrm{Z}}(x).$$

13.b.iii. Notons que par la question précédente, $g(\mathrm{S_Z}(x)) = g(p\mathrm{S}^*_\mathrm{Z}(x))$, et donc il s'agit de prouver que

$$g(\mathrm{S_{X+Z}}(x)) - g(\mathrm{S_X}(x)) \leq g(p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X+Z}}(x)) - g(p\mathrm{S}^*_\mathrm{X}(x)).$$

Soit $b = p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X+Z}}(x) \in ]0,1]$. D'après la question 13.b.i, on a $b < \mathrm{S_{X+Z}}(x)$. Soit alors $\varepsilon = (1-p)\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}=0]}(\mathrm{X} > x)$, de telle sorte que $b + \varepsilon = \mathrm{S_{X+Z}}(x)$.
Posons $a = p\mathrm{S}^*_\mathrm{X}(x)$. Alors $a + \varepsilon = p\mathrm{S}^*_\mathrm{X}(x) + (1-p)\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}=0]}(\mathrm{X} > x) = \mathrm{S_X}(x)$ (d'après la question 13.b.ii). Le résultat de la question 10.c nous permet alors d'affirmer que

$$g(b+\varepsilon) - g(a+\varepsilon) \leq g(b) - g(a) \Leftrightarrow g(\mathrm{S_{X+Y}}(x)) - g(\mathrm{S_X}(x)) \leq g(p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X+Y}}(x)) - g(p\mathrm{S}^*_\mathrm{X}(x)).$$

En retranchant $g(\mathrm{S_Z}(x)) = g(p\mathrm{S}^*_\mathrm{Z}(x))$ aux deux membres, on obtient

$$g(\mathrm{S_{X+Y}}(x)) - g(\mathrm{S_X}(x)) - g(\mathrm{S_Z}(x)) \leq g(p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X+Y}}(x)) - g(p\mathrm{S}^*_\mathrm{X}(x)) - g(p\mathrm{S}^*_\mathrm{Z}(x)).$$

13.c. Il est évident que $h$ est continue et croissante sur $[0,1]$ car $g$ l'est.
De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{g(p)} = 0$ et $h(1) = \frac{g(p)}{g(p)} = 1$.
Enfin, pour $(a,b) \in [0,1]^2$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $pa \in [0,1]$ et $pb \in [0,1]$, de sorte que par concavité de $g$,

$$g(\lambda pa + (1-\lambda)pb) \geq \lambda g(pa) + (1-\lambda)g(pb)$$

ce qui après division par $g(p)$ nous donne

$$h(\lambda a + (1-\lambda)b) = \frac{g\left(p\left(\lambda a + (1-\lambda b)\right)\right)}{g(p)} \geq \lambda\frac{g(pa)}{g(p)} + (1-\lambda)\frac{g(pb)}{g(p)} = \lambda h(a) + (1-\lambda)h(b).$$

Ainsi la fonction $h$ est concave sur $[0,1]$. Par conséquent, $\boxed{h \text{ est une fonction de distorsion.}}$

*L'hypothèse de récurrence est très claire : on suppose que le résultat est vrai* ***pour toute probabilité*** P ***sur*** $(\Omega, \mathcal{A})$***.*** *En particulier, il est vrai pour la probabilité* $\mathrm{P}^*$.

Pour la probabilité $\mathrm{P}^*$, la variable Z est presque sûrement à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. En effet, par définition,

$$\mathrm{P}^*(\mathrm{Z} \in [\![1, n+1]\!]) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{Z} \in [\![1, n+1]\!] \cap [\mathrm{Z} > 0])}{\mathrm{P}(\mathrm{Z} > 0)}$$

Mais $\mathrm{P}(\mathrm{Z} > 0) = \mathrm{P}([\mathrm{Z} > 0] \cap [\mathrm{Z} \in [\![0, n+1]\!]]) + \underbrace{\mathrm{P}([\mathrm{Z} > 0] \cap [\mathrm{Z} \notin [\![0, n+1]\!]])}_{=0} = \mathrm{P}([\mathrm{Z} > 0] \cap [\mathrm{Z} \in [\![1, n+1]\!]]) =$

$\mathrm{P}([\mathrm{Z} > 0] \cap [\mathrm{Z} \in [\![1, n+1]\!]])$. Ainsi $\mathrm{P}^*(\mathrm{Z} \in [\![1, n+1]\!]) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{Z}>0)}{\mathrm{P}(\mathrm{Z}>0)} = 1$.

Alors $\mathrm{Z} - 1$ est presque sûrement (toujours pour la probabilité $\mathrm{P}^*$) à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
Notons $\mathrm{E}^*_h$ l'espérance corrigée (lorsqu'elle existe) pour la probabilité $\mathrm{P}^*$. Autrement dit, pour toute variable aléatoire V pour laquelle l'intégrale suivante converge,

$$\mathrm{E}^*_h(\mathrm{V}) = \int_0^{+\infty} h(\mathrm{S}^*_\mathrm{V}(x))dx.$$

Alors par hypothèse de récurrence, $\mathrm{E}^*_h(\mathrm{X} + (\mathrm{Z}-1)) \leq \mathrm{E}^*_h(\mathrm{X}) + \mathrm{E}^*_h(\mathrm{Z}-1)$.
Mais nous avons prouvé à la question 11.c que $\mathrm{E}^*_h(\mathrm{Z}-1) = \mathrm{E}^*_h(\mathrm{Z}) - 1$, et de même
$\mathrm{E}^*_h(\mathrm{X}+\mathrm{Z}-1) = \mathrm{E}^*_h(\mathrm{X}+\mathrm{Z}) - 1$.
Donc $\mathrm{E}^*_h(\mathrm{X}+\mathrm{Z}) \leq \mathrm{E}^*_h(\mathrm{X}) + \mathrm{E}^*_h(\mathrm{Z})$. Soit encore

$$\boxed{\int_0^{+\infty} h(\mathrm{S}^*_{\mathrm{X+Z}}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} h(\mathrm{S}^*_\mathrm{X}(x))dx + \int_0^{+\infty} h(\mathrm{S}^*_\mathrm{Z}(x))dx.}$$

13.d. Le résultat de la question précédente est équivalent (après multiplication par $g(p)$) à :

$$\int_0^{+\infty} \left(g(p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X+Z}}(x)) - g(p\mathrm{S}^*_\mathrm{X}(x)) - g(p\mathrm{S}^*_\mathrm{Z}(x))\right) dx \leq 0.$$

D'après la question 12, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{X+Z}}(x))dx, \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{X}}(x))dx \text{ et } \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{Z}}(x))dx$$

convergent, de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(g(\mathrm{S}_{\mathrm{X+Z}}(x)) - g(\mathrm{S}_{\mathrm{X}}(x)) - g(\mathrm{S}_{\mathrm{Z}}(x))\right) dx$ converge.
Alors en intégrant l'inégalité de la question 13.b.iii, il vient

$$\int_0^{+\infty} \left(g(\mathrm{S}_{\mathrm{X+Z}}(x)) - g(\mathrm{S}_{\mathrm{X}}(x)) - g(\mathrm{S}_{\mathrm{Z}}(x))\right) dx \leq \int_0^{+\infty} \left(g(p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X+Z}}(x)) - g(p\mathrm{S}^*_{\mathrm{X}}(x)) - g(p\mathrm{S}^*_{\mathrm{Z}}(x))\right) dx \leq 0.$$

Et donc

$$\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{X+Z}}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{X}}(x))dx + \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{Z}}(x))dx$$

ce qui nous donne bien

$$\boxed{\mathrm{E}_g(\mathrm{X}+\mathrm{Z}) \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(\mathrm{Z}).}$$

Ainsi, l'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence, pour tout entier $n$, pour toute probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et toute variable aléatoire U telle que $\mathrm{P}(\mathrm{U} \in [\![0, n]\!]) = 1$, on a

$$\mathrm{E}_g(\mathrm{X}+\mathrm{U}) \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(\mathrm{U}).$$

14.a Pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leq \lfloor n\mathrm{Y}(\omega) \rfloor \leq n\mathrm{Y}(\omega)$ et donc $0 \leq \mathrm{Y}_n(\omega) \leq \mathrm{Y}(\omega)$.
En particulier, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n \in [0, \mathrm{B}]) \geq \mathrm{P}(\mathrm{Y} \in [0, \mathrm{B}]) = 1$ et donc, une probabilité étant inférieure ou égale à 1, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n \in [0, \mathrm{B}]) = 1$.
D'après le résultat de la question 12, $\mathrm{E}_g(\mathrm{Y}_n)$ existe, de même que $\mathrm{E}_g(\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n)$.
La variable $n\mathrm{Y}_n$ est à valeurs entières, et prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0, \lfloor n\mathrm{B} \rfloor]\!]$.
Il est alors possible d'appliquer le résultat de la question 13 aux variables $n\mathrm{X}$ (qui admet une espérance corrigée d'après 11.c) et $n\mathrm{Y}_n$. On a alors

$$\mathrm{E}_g(n\mathrm{X} + n\mathrm{Y}_n) \leq \mathrm{E}_g(n\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(n\mathrm{Y}_n).$$

Mais, toujours par la question 11.c, $\mathrm{E}_g(n\mathrm{X} + n\mathrm{Y}_n) = n\mathrm{E}_g(\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n), \mathrm{E}_g(n\mathrm{X}) = n\mathrm{E}_g(\mathrm{X})$ et $\mathrm{E}_g(n\mathrm{Y}_n) = n\mathrm{E}_g(\mathrm{Y}_n)$. Donc $\boxed{\mathrm{E}_g(\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n) \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(\mathrm{Y}_n).}$

14.b Soit $\omega \in \Omega$ tel que $\mathrm{Y}_n(\omega) > x$. Puisque $\mathrm{Y}_n(\omega) \leq \mathrm{Y}(\omega)$, nécessairement $\mathrm{Y}(\omega) > x$. Autrement dit, on a l'inclusion d'événements $[\mathrm{Y}_n > x] \subset [\mathrm{Y} > x]$.

Par conséquent, pour $x > 0$, $\mathrm{S}_{\mathrm{Y}_n}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n > x) \leq \mathrm{P}(\mathrm{Y} > x) = \mathrm{S}_{\mathrm{Y}}(x)$.
Par croissance de $g$, il vient $\forall x > 0, g(\mathrm{S}_{\mathrm{Y}_n}(x)) \leq g(\mathrm{S}_{\mathrm{Y}}(x))$ et par croissance de l'intégrale,

$$\mathrm{E}_g(\mathrm{Y}_n) = \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{Y}_n}(x))dx \leq \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{Y}}(x))dx = \mathrm{E}_g(\mathrm{Y}).$$

14.c Le changement de variables $u = x + \frac{1}{n}$ réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $\left]\frac{1}{n}, +\infty\right[$, et donc les intégrales

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{X+Y}}(u))du \text{ et } \int_0^{+\infty} g\left(\mathrm{S}_{\mathrm{X+Y}}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) dx$$

sont toutes deux convergentes (car la première l'est par la question 14.a) et sont égales.

Par définition de la partie entière, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\lfloor n\mathrm{Y}(\omega) \rfloor \leq n\mathrm{Y}(\omega) < \lfloor n\mathrm{Y}(\omega) \rfloor + 1.$$

Soit $\forall \omega \in \Omega$, $0 \leq \mathrm{Y}(\omega) - \mathrm{Y}_n(\omega) < \frac{1}{n}$.
Soit donc $x > 0$ et $\omega \in \Omega$ tels que $\mathrm{X} + \mathrm{Y} > x + \frac{1}{n}$. Alors

$$(\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n)(\omega) = (\mathrm{X}+\mathrm{Y})(\omega) - (\mathrm{Y}-\mathrm{Y}_n)(\omega) > x + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = x.$$

Autrement dit, on a l'inclusion d'événements

$$\left[\mathrm{X}+\mathrm{Y} > x + \frac{1}{n}\right] \subset [\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n > x].$$

Et donc en passant aux probabilités :

$$0 \leq \mathrm{S}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\left(x + \frac{1}{n}\right) \leq \mathrm{S}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n}(x).$$

Comme dans les questions précédentes, par croissance de $g$, puis par croissance de l'intégrale (les intégrales en question existent), il vient

$$\int_0^{+\infty} g\left(\mathrm{S}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right) dx \leq \int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n}(x))dx = \mathrm{E}_g(\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n).$$

14.d En utilisant successivement les résultats des questions 14.c, 14.a et 14.b, il vient

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}(x))dx \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}+\mathrm{Y}_n) \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(\mathrm{Y}_n) \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(\mathrm{Y}).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient alors

$$\int_0^{+\infty} g(\mathrm{S}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}(x))dx \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(\mathrm{Y}).$$

Soit encore $\boxed{\mathrm{E}_g(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) \leq \mathrm{E}_g(\mathrm{X}) + \mathrm{E}_g(\mathrm{Y}).}$