(c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{sh(x) - x\,ch(x)}{(sh(x))^2} = \frac{h(x)}{(sh(x))^2}$.
Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par parité, f est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

5. (a) $x \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1$ d'où $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum\limits_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2}[e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}]}{e^{x/2}[e^{-x/2} - e^{x/2}]}$
(méthode analogue à la factorisation par l'angle moitié)
$= \frac{-e^{(n+1)x/2}}{-e^{x/2}} \frac{e^{(n+1)x/2} - e^{-(n+1)x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = e^{(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2})} \ \frac{2sh((n+1)x/2)}{2sh(x/2)} = e^{\frac{n}{2}x}[\frac{sh((n+1)x/2}{sh(x/2)}]$.
(b) On applique l'égalité précédente en $-x$ ($-x \in \mathbb{R}^*$ puisque $x \in \mathbb{R}^*$),
d'où $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx} = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{sh(-(n+1)x/2)}{sh(-x/2)}] = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{-sh((n+1)x/2)}{-sh(x/2)}] = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)}]$ par imparité de sh.
(c) Pour $x \neq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} ch(kx) = \frac{1}{2}[\sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} + \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx}] = \frac{1}{2}[e^{\frac{n}{2}x} + e^{-\frac{n}{2}x}] \frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)} = ch(nx/2) \frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)}$

Exercice 2:

1. Poser $f(x) = -\ln(1-x) - x$ pour $x \in [0,1[$; TV pour obtenir son signe (f croissante sur $[0,1[$ et $f(0) = 0$).
Pour tout $k \geq 2$ $x = \frac{1}{k} \in [0,1[$, d'où $\frac{1}{k} \leq -\ln(1 - \frac{1}{k}) = -\ln(\frac{k-1}{k}) = -[\ln(k-1) - \ln k] = \ln k - \ln(k-1)$
En sommant ces inégalités, pour k variant de 2 à $n-1$, $\sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum\limits_{k=2}^{n-1} (\ln k - \ln(k-1)) = \ln(n-1) - \ln 1 = \ln(n-1)$
(somme télescopique). Finalement, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n-1)$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \frac{(x+1)^2 - x*2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) - 2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. Donc f admet un maximum en 1 de valeur $f(1) = 1/4$. De plus, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. Récurrence : $u_1 = \frac{1}{4} \in [0,1]$. Puis si pour $n \geq 1$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$, alors par stricte croissance de f sur $[0, \frac{1}{n}] \subset [0,1]$ ($n \geq 1$), $f(0) < f(u_n) \leq f(\frac{1}{n})$, d'où $0 < u_{n+1} \leq f(1/n)$. Or $f(1/n) = \frac{1/n}{(1/n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ (car $\frac{n}{n+1} \leq 1$). Conclure. On en déduit par le théorème d'encadrement que la suite (u_n) converge vers 0.

4. a) $v_k = \frac{(u_k+1)^2}{u_k} - \frac{1}{u_k} = \frac{(u_k)^2 + 2u_k}{u_k} = u_k + 2$. D'où $0 \leq u_k \leq \frac{1}{k} \Rightarrow 2 \leq v_k = u_k + 2 \leq 2 + \frac{1}{k}$.
b) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1}$ (somme télescopique) $= \frac{1}{u_n} - 4$. Puis en sommant l'encadrement du a) pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} 2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} (2 + \frac{1}{k})$ d'où $2(n-1) \leq \frac{1}{u_n} - 4 \leq 2(n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
d'où $2(n-1) + 4 \leq \frac{1}{u_n} \leq 4 + 2(n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. On conclut en remarquant que $2(n-1) + 4 = 2(n+1)$.
c) Le b) donne : $2\frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{nu_n} \leq 2\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. Or $2\frac{n+1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$ et par la question préliminaire, $0 \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}(1 + \ln(n-1)) = \frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées). Donc (théorème d'encadrement), $\frac{1}{nu_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$.

Exercice 3:

1. Par récurrence (double) :supp. pour un certain n,$F_n \in \mathbb{N}$ et $F_{n+1} \in \mathbb{N}$. Alors $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \in \mathbb{N}$.
Monotonie par récurrence (double) : $F_0 \leq F_1$ et comme $F_2 = 1 + 0 = 1$, $F_1 \leq F_2$.
Supposons que pour un certain n, $F_n \leq F_{n+1}$ et $F_{n+1} \leq F_{n+2}$. Il faut montrer que $F_{n+2} \leq F_{n+3}$. Or en sommant les deux inégalités de l'H.R., on obtient : $F_n + F_{n+1} \leq F_{n+1} + F_{n+2}$ d'où $F_{n+2} \leq F_{n+3}$. Conclure.

2. a) $\Delta = 5$; $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. $\frac{1}{a} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -b$.
Puis $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 9 \Rightarrow 1 < \frac{3}{2} < a < 2$. Et $-3 < -\sqrt{5} < -2 \Rightarrow -2 < 1 - \sqrt{5} < -1 \Rightarrow -1 < b < -\frac{1}{2}$.
b) Soit par récurrence (le résultat est donné dans l'énoncé), soit reconnaître que (F_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et appliquer la méthode du cours.
c) $a > 1 \Rightarrow a^n \to +\infty$ et $|b| < 1 \Rightarrow b^n \to 0$. D'où $F_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

3. a) Cas $n = 1$: $(F_1)^2 - F_2F_0 = 1^2 - 0 = 1 = (-1)^2$.
Supposons pour un certain $n \geq 1$: $(F_n)^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$ et mq $(F_{n+1})^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^{n+2}$.
Or $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ d'où $(F_{n+1})^2 - F_{n+2}F_n = (F_{n+1})^2 - F_{n+1}F_n - (F_n)^2 = (F_{n+1})^2 - F_{n+1}F_n - [(-1)^{n+1} + F_{n+1}F_{n-1}]$ par H.R. $= F_{n+1}[F_{n+1} - F_n - F_{n-1}] - (-1)^{n+1} = 0 + (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}$. Conclure.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $F_{n+2}F_{n-1} - F_{n+1}F_n = (F_{n+1} + F_n)F_{n-1} - F_{n+1}F_n = F_{n+1}F_{n-1} + F_nF_{n-1} - F_{n+1}F_n = (F_n)^2 - (-1)^{n+1} + F_nF_{n-1} - F_{n+1}F_n$ par a) $= F_n[F_n + F_{n-1} - F_{n+1}] - (-1)^{n+1} = 0 + (-1)^n$.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. $u_{n+2} - u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+2}F_{n-1} - F_nF_{n+1}}{F_{n+1}F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}$ par 3.b)
b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n}$: $v_{n+1} - v_n = u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n+1}F_{2n-1}} = \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n-1}} > 0$.
Donc la suite v est croissante. Faire de même avec l'autre.
c) $u_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1} - b^{n-1}} = \frac{a^n[1-(b/a)^n]}{a^{n-1}[1-(b/a)^{n-1}]} = a\frac{1-(b/a)^n}{1-(b/a)^{n-1}} \to a$ car $|b/a| < 1$.
d) Donc la suite (u_{2n}) tend vers a, et comme elle est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \leq a$. De même pour l'autre côté.

5. a) $\beta_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(a^{n+1} - b^{n+1} - a(a^n - b^n)] = \frac{1}{\sqrt{5}}[ab^n - b^{n+1}] = \frac{1}{\sqrt{5}}b^n[a - b] = b^n$ car $a - b = \sqrt{5}$. D'où $\beta_{2n} = b^{2n} = (b^2)^n$
Or $-1 < b < \frac{-1}{2} \Rightarrow 1 > b^2 > \frac{1}{4} > 0$ ($x \to x^2$ st. décroissante sur $\mathbb{R}^-$) $\Rightarrow 1 > \beta_{2n} > (\frac{1}{4})^n > 0$.
c) par a), on obtient $0 < F_{2n+1} - aF_{2n} < 1$ d'où $F_{2n+1} - 1 < aF_{2n} < F_{2n+1}$, encadrement entre 2 entiers consécutifs car $F_{2n+1} \in \mathbb{N}$ d'où $F_{2n+1} - 1 = \lfloor aF_{2n} \rfloor$.

Exo II.

Eléments de correction du DS 1

Questions

1. Par linéarité, $S_1 = 2\sum\limits_{k=10}^{40} k^2 - 6\sum\limits_{k=10}^{40} k = 2[\sum\limits_{k=1}^{40} k^2 - \sum\limits_{k=1}^{9} k^2] - 6\sum\limits_{k=10}^{40} k = 2[\frac{40*41*81}{6} - \frac{9*10*19}{6}] - 6\frac{31*50}{2}$.
   Formules sur les puissances : $S_2 = (-1)^{-1}2^3\sum\limits_{k=5}^{30}\frac{(-1)^k(2)^k}{(3^2)^k} = -8\sum\limits_{k=5}^{30}(-\frac{2}{9})^k = -8(-\frac{2}{9})^5\frac{1-(-2/9)^{26}}{1-(-2/9)} = 8(\frac{2}{9})^5\frac{1-(2/9)^{26}}{1+2/9}$.
   Cf DM2, binôme de Newton : $S_3 = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k3^{n-k} = \frac{1}{n!}[\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k3^{n-k} - \binom{n}{0}4^03^n] = \frac{1}{n!}[(4+3)^n - 3^n] = \frac{1}{n!}[7^n - 3^n]$.
2. Sur $\mathbb{C}$: $z = 0$ n'est pas solution et tout $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit de manière unique $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
   Or $\sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}) = 2e^{i\pi/6}$ et $\rho^4 e^{i4\theta} = 2e^{i\pi/6} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho^4 = 2\\ 4\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = 2^{1/4} \text{ car } \rho > 0\\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{4}\end{array}\right.$
   Avec la contrainte $\theta \in [0, 2\pi[$, il reste 4 arguments possibles $\frac{\pi}{24}$, $\frac{13\pi}{24}$, $\frac{25\pi}{24}$ et $\frac{37\pi}{24}$.
   Finalement, $\mathcal{S} = \{2^{1/4}e^{i\pi/24}, 2^{1/4}e^{i13\pi/24}, 2^{1/4}e^{i25\pi/24}, 2^{1/4}e^{i37\pi/24}\}$
3. L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Mais si $x \in]-\infty, -1[$, $x + 1 < 0$ et x ne peut pas être solution.
   Sur $[-1, +\infty[$, $x+1 \geq 0$ d'où $|x^2 - 1| \leq x + 1 \Leftrightarrow -(x+1) \leq x^2 - 1 \leq x + 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2 - x - 2 \leq 0\\ 0 \leq x^2 + x\end{array}\right.$ Or sur $[-1, +\infty[$,
   $x^2 + x = x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [0, +\infty[$ et pour $x^2 - x - 2$: $\Delta = 9$ deux racines -1 et 2. *Ccl* : $\mathcal{S} = [0, 2] \cup \{-1\}$.
4.
```
a=input('entrer a') ; b=input('entrer b')
if a*b>0 then, disp(log(a*b)),else disp('erreur'),end
```
5. f est définie sur $\mathbb{R}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1/e^x}{(\frac{e^x+1}{e^x})^2} = \frac{(e^x)^2}{e^x(e^x+1)^2} = f(x)$.
   En $-\infty$, pas de F.I. car $e^x \to 0$ d'où $f(x) \to 0$. Puis en $+\infty$, par parité, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Exercice 1:

1. $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x$ (par stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ donc $D = \mathbb{R}_+^*$.
2. a) En 0^+ : $f(x) = \ln(e^x - e^{-x}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ car $e^x - e^{-x} \to 1 - 1 = 0$. Asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   En $+\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $e^{-x} \to 0$ et $e^x \to +\infty$.
   b) $\forall x \in D$, $f'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} > 0$ car $x \in D$ donc $e^x - e^{-x} > 0$. On en déduit le tableau de variations.
   c) f est strictement croissante (et continue sur D) et l'ensemble des valeurs prises est $f(D) =]-\infty, +\infty[$.
   Comme $0 \in f(D) = \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in D$. En particulier $\alpha > 0$.
   Puis $f(1) = \ln(e - \frac{1}{e}) > 0$ car $e > 2$, $\frac{1}{e} < 1$ donc $e - \frac{1}{e} > 2 - 1 = 1$. D'où $\alpha < 1$.
   d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 - e^{-x} = 0$. Posons $X = e^x > 0$; alors l'équation devient $X - 1 - 1/X = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2-X-1}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 1 = 0$. On obtient une équation du second degré : $\Delta = 5$ donc deux racines $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Or $X > 0$, donc $X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et finalement, l'unique solution est $\alpha = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.
   e) Plus généralement $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(e^x - e^{-x}) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^y \Leftrightarrow e^x - e^y - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow X - e^y - 1/X = 0 \Leftrightarrow X^2 - e^yX - 1 = 0$. $\Delta = e^{2y} + 4$ donc il y a deux solutions $X = \frac{e^y\pm\sqrt{e^{2y}+4}}{2}$ mais $X > 0 \Rightarrow X = \frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2}$ car $e^{2y} + 4 > e^{2y}$ donc $\sqrt{e^{2y}+4} > \sqrt{e^{2y}} = e^y$. Et finalement l'unique solution est $x = \ln(X) = \ln(\frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2})$.
3. a) $e^\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $e^{-\alpha} = \frac{1}{e^\alpha} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ d'où $f'(\alpha) = ... = \frac{(1+\sqrt{5})^2+2^2}{(1+\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{10+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2(1+\sqrt{5})} = \sqrt{5}$.
   b)$f(x) - x = \ln(e^x(1 - e^{-2x})) - x = \ln(e^x) + \ln(1 - e^{-2x}) - x = \ln(1 - e^{-2x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$. OU $f(x) - x = \ln(e^x - e^x) - \ln(e^x) = ...$ (formule sur le ln)
   c) Puis $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x}) < 0$ car $\forall x > 0$, $1 - e^{-2x} < 1$; la courbe est en-dessous de (Δ).
   d) Dessiner les asymptotes, la tangente ... puis la courbe.
4. a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})}{e^x-e^x} = \frac{2e^{-x}}{e^x-e^{-x}} > 0$ car $x > 0$.
   b) D'après 3.b), en posant $y = -e^{-2x} \to 0$, $e^{2x}h(x) = e^{2x}\ln(1 - e^{-2x}) = \frac{\ln(1-e^{-2x})}{e^{-2x}} = -\frac{\ln(1+y)}{y} \to -1$.

Exercice 2:

1. (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x}$ et pour $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$. Donc f est strictement croissante et $f(-1) = 0$. En particulier f est positive sur $\mathbb{R}$. En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x = +\infty$.

   (b) Soit $x \in [-1, +\infty[$. $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x$. Si $x \in [-1, 0[$ $x < 0$ donc n'est pas solution (car $f(x) \geq 0$).
   Sur $[0, +\infty[$, comme $x \geq 0$, $\sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{2} = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$. $\Delta = 9$, et les racines sont $r_1 = -1/2 \notin [0, +\infty[$ et $r_2 = 1 \in [0, +\infty[$. Conclusion : pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$.
   Résolution de l'inéquation :
   si $-1 \leq x < 0$ alors $x < 0 \leq \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ (car une racine carré est positive) donc $x < f(x)$.
   Puis si $x \geq 0$; $f(x) \geq x \Leftrightarrow \frac{1+x}{2} \geq x^2$ (car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$)
   $\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \leq 0$. D'après l'étude précédente, on obtient (comme $x \geq 0$), $0 \leq x \leq 1$.
   Conclusion : sur $[-1, +\infty[$, $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$.

Exo III.

(d)
```
function y=f(x) ; y=sqrt((1+x)/2) ; endfunction
x=-1:0.1:10; fplot2d(x,f) ; plot2d(x,x)
```

2. a) u semble croitre et converger vers 1.
b) $u_0 = 1$ car alors $u_1 = f(u_0) = f(1) = 1$ et par récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
c) prendre $u_0 > 1$. d) non
3. (a) Par récurrence : *cas* n=0 : d'après l'énoncé $u_0 \in [-1, 1]$.
Supposons que pour un certain n, u_n existe et $-1 \le u_n \le 1$ et mq u_{n+1} existe et $-1 \le u_{n+1} \le 1$.
Or $u_n \ge -1$ donc $\frac{1+u_n}{2} \ge 0$ et u_{n+1} existe. Puis $-1 \le u_n \le 1 \Rightarrow f(-1) \le f(u_n) \le f(1)$ (par croissance de f) $\Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 1 \Rightarrow -1 \le 0 \le u_{n+1} \le 1$. *Ccl.*
(b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or par 1.(b), pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) \ge x$ càd $f(x) - x \ge 0$.
Donc en $x = u_n \in [-1, 1]$, $f(u_n) - u_n \ge 0$: la suite u est croissante.
(c) La suite u est croissante et majorée par 1, donc elle converge. Soit $l \in [-1, 1]$ sa limite. Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $l = f(l) \Leftrightarrow l = 1$ par 1.(b)
4. (a) Quantité conjuguée : $f(x) - 1 = \sqrt{\frac{1+x}{2}} - 1 = \frac{\frac{1+x}{2}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{2}}+1} = \frac{x-1}{2(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}+1)} = \frac{x-1}{\sqrt{2}\sqrt{x+1}+2} = \frac{x-1}{\sqrt{2+2x}+2}$.
(b) $|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - 1| = \frac{|u_n-1|}{2+\sqrt{2+2u_n}} \le \frac{|u_n-1|}{2}$ car $2 + \sqrt{2 + 2u_n} \ge 2$.
(c) Par récurrence : *cas* $n = 0$: $|u_0 - 1| \le 2$ car $-1 \le u_0 \le 1 \Rightarrow -2 \le u_0 - 1 \le 0 \Rightarrow |u_0 - 1| \le 2$ et $(\frac{1}{2})^{0-1} = 2$.
Supposons que pour un certain n : $|u_n - 1| \le (\frac{1}{2})^{n-1}$. Alors par b) puis par H.R., on a :
$|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|u_n - 1| \le \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^n$ *Ccl.*
Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $(\frac{1}{2})^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc (théorème d'encadrement) $|u_n - 1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ càd $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
5. (a) Sur $[0, \pi]$, cos est st. décroissante (et continue) et prend une seule fois toutes les valeurs entre 1 et -1.
(b) $\cos(2x) \ \big(= (\cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) \big) \ = 2\cos^2(x) - 1$.
(c) *Cas* $n = 0$: $\cos(\frac{\varphi}{2^0}) = \cos(\varphi) = u_0$. Supposons pour un certain $n \ge 0$ que $u_n = \cos(\frac{\varphi}{2^n})$. Alors
$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\varphi}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{2\varphi}{2^{n+1}})}{2}} = \sqrt{\frac{1+(2\cos^2(\frac{\varphi}{2^{n+1}})-1)}{2}} = \sqrt{\cos^2(\frac{\varphi}{2^{n+1}})} = |\cos(\frac{\varphi}{2^{n+1}})|$
$= \cos(\frac{\varphi}{2^{n+1}})$ puisque $n \ge 0 \Rightarrow n + 1 \ge 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\varphi}{2^{n+1}} \le \frac{\pi}{2}$ (car $\varphi \in [0, \pi]$) $\Rightarrow \cos(\frac{\varphi}{2^{n+1}}) \ge 0$ *Ccl.*
Comme $\frac{\varphi}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on retrouve que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$.
(d) $4^n(u_n - 1) = \frac{u_n-1}{[1/(2^n)]^2} = \frac{\cos(\frac{\varphi}{2^n})-1}{[1/(2^n)]^2} = \varphi^2 \frac{\cos(\frac{\varphi}{2^n})-1}{(\frac{\varphi}{2^n})^2} = \varphi^2 \frac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \times \varphi^2$ en posant $x = \frac{\varphi}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3: Partie I

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. *Cas* $n = 0$: $u_0 = a > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ge u_n > 0$. *Ccl.* Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \ge 0$ donc la suite est croissante. OU montrer qu'elle est croissante donc minorée par $u_0 > 0$, donc strictement positive.
2. Supposons que la suite est majorée. Alors comme elle est croissante, elle converge : soit l sa limite. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ on obtient $l = l + l^2 \Leftrightarrow l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$. Contradiction, car la suite étant croissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge u_0 = a$ donc $l \ge a > 0$.
3. u est croissante et non majorée donc u diverge vers $+\infty$.

II

1. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n + u_n^2) - \frac{2}{2^{n+1}} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}[\ln(u_n + u_n^2) - \ln(u_n^2)]$
$= \frac{1}{2^{n+1}}[\ln(\frac{u_n+u_n^2}{u_n^2})] = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_n})$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par croissance de la suite u, on a $u_k \ge u_0 = a$ d'où $\frac{1}{u_k} \le \frac{1}{a}$ et $\ln(1 + \frac{1}{u_n}) \le \ln(1 + \frac{1}{a})$. On en déduit par 1., $v_{k+1} - v_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_k}) \le \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{a})$.
Par ailleurs, comme $u_k > 0$, on obtient $1 + \frac{1}{u_k} > 1$ et $\ln(1 + \frac{1}{u_k}) > 0$. D'où $v_{k+1} - v_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_k}) > 0$.
3. Par 2. : $\sum_{k=0}^{n-1} 0 < \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{a})$. D'où $0 < v_n - v_0 \le \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{a}) \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{a}) \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}$
$= (\ln(1 + \frac{1}{a})(1 - (\frac{1}{2})^n) \le \ln(1 + \frac{1}{a})$.
4. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le \ln(1 + \frac{1}{a}) + v_0$ donc la suite (v_n) est majorée. Comme elle est de plus croissante (puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} - v_k > 0$), elle converge.
5. v croissante implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le \alpha$. D'où $\frac{1}{2^n} \ln(u_n) \le \alpha$, et $\ln(u_n) \le 2^n\alpha$, puis $u_n \le \exp(2^n\alpha)$.
6. On a donc l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp(2^n\alpha) - 1 \le u_n \le \exp(2^n\alpha)$ d'où $1 - \exp(-2^n\alpha) \le \frac{u_n}{\exp(2^n\alpha)} \le 1$. Le théorème d'encadrement permet alors de conclure.
7. Les deux inégalités du 5. permettent d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le \exp(2^n\alpha) - u_n \le 1$. Donc la suite β est bornée.
De plus, $\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n = \exp(\alpha 2^{n+1}) - u_{n+1} + (\exp(\alpha 2^n) - u_n)^2 - (\exp(\alpha 2^n) - u_n) = [\exp(\alpha 2^n)]^2 - u_n - u_n^2 + [\exp(\alpha 2^n)]^2 - 2u_n \exp(\alpha 2^n) + u_n^2 - \exp(\alpha 2^n) + u_n = \exp(\alpha 2^n)[2\exp(\alpha 2^n) - 2u_n - 1]$. D'où le résultat ....
8. La suite β étant bornée entre 0 et 1, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \le \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n \le 2$
d'où $-1 \times \exp(-\alpha 2^n) \le (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n) \le 2\exp(-\alpha 2^n)$ et d'après le théorème d'encadrement, $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ càd $2\beta_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ soit encore $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.