Devoir sur feuille 4

le 28/02/2015

Questions :

1. Montrer que $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n + 2u_{n+2} = 0\}$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que la famille $\{x \mapsto e^x,\ x \mapsto xe^x\}$ est libre dans l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $f(P) = (P(0), P'(1), P''(0))$.
   a) Montrer que f est linéaire
   b) Montrer que l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Qu'en déduit-on sur f ?

Exercice 1: `Eml S 1995`

Soit la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Préciser le signe de F sur $\mathbb{R}^*$.
3. Etudier la parité de F.
4. Montrer que F se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 1.
5. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$
6. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[,\ xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.
7. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant F(x)$, et en déduire le tableau de variations de F sur $]0, +\infty[$.
8. Etude locale de F en $+\infty$
   (a) On note h l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \int\limits_1^x \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.
   En utilisant le changement de variable $z = \frac{1}{t}$, former une relation entre $h(x)$ et $h(\frac{1}{x})$, pour $x \in]0, +\infty[$.
   (b) En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[,\ xF(x) + \frac{1}{x}F(\frac{1}{x}) = 2F(1)$.
   (c) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
   (d) Montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$.
9. Déterminer la limite de F en $-\infty$.
10. Tracer la courbe représentative de F.

Exercice 2: `inspiré d'Eml S 88`

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :$f_n(x) = \begin{cases} e^{-n(x+\frac{1}{x})} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f_1 est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
3. Exprimer f_n en fonction de f_1.
4. Etudier les variations de f_n. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) \leqslant e^{-2n}$ (*)
5. Tracer approximativement la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé et la situer par rapport à celle de f_{n+1}.
6. a) Montrer que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$: $f_n(x) = \dfrac{1}{n}(x-1)$ admet une unique solution notée v_n.
   on pourra étudier une certaine application sur $[0, 1[$ *puis sur* $[1, +\infty[$.
   b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1, à l'aide de (*).
7. Pour tout n de N^*, on pose $I_n = \int\limits_0^1 f_n(t)dt$
   (a) Montrer que la suite (I_n) est monotone. En déduire qu'elle converge.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \leq e^{-nx}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n}$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 3: `inspiré d'eslsca 94`

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AX = XA\}$ et $f : \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ X \mapsto AX + XA \end{array}$

1. A est-elle inversible ?
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une base du noyau de f.
5. Déterminer une base de l'image de f.
6. f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 4: `extrait d'Ecricome S 2009`

Dans tout l'exercice, a et b sont des entiers naturels non nuls. On considère une urne initialement constituée de a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs au hasard et avec remise d'une boule en procédant de la fonçon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne mais est remplacée par une boule blanche, avant le tirage suivant

1. Recopier et compléter le script scilab suivant, afin qu'il affiche le nombre de boules blanches à l'issue de n tirages : on rappelle que `rand()` renvoie un réel au hasard entre 0 et 1.
```
a=input("nombre de blanches au départ") ; b=input("nombre de noires au départ") ;
n=input("nombre de tirages");
x= ...... ;
for i=1:n
if ................ then, x=........... end;
end; disp(x)
```
2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.
   (a) Ecrire un script scilab qui simule une réalisation de la variable Y.
   (b) Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.
   (c) Pour tout entier k compris entre 1 et $b+1$, calculer $P(Y = k)$.
   (d) Vérifier que $P(Y = b+1) = \frac{b!}{(a+b)^b}$ et que pour tout $k \in [\![1, b]\!]$, la formule suivante est vraie :
   $P(Y = k) = \dfrac{b!}{(b-(k-1))!(a+b)^{k-1}} - \dfrac{b!}{(b-k)!(a+b)^k}$.
   (e) Soit $M \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, ..., a_M$ une famille de réels. Etablir : $\sum\limits_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum\limits_{k=0}^{M-1} a_k\right) - Ma_M$.
   (f) En déduire que $E(Y) = \sum\limits_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!(a+b)^k}$.
3. On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages avec pour convention $X_0 = 0$, et pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement "au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires".
   On remarquera que $p_{0,0} = 1$ et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}$?
   (b) Démontrer la formule suivante valable pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$:
   $(a+b)p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}$.
   (c) En déduire que $(a+b)E(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} [b + k(a+b-1)]p_{n-1,k}$.