CORRIGE DEVOIR MAISON 11, question 7b

Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \Delta^{n+1}(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\mathrm{d}t \qquad (f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R})$$

- La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\Delta^1(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$

- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier n et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$. Comme

  $$\Delta^{n+2}(f) = \Delta^{n+1} \circ \Delta(f) = \Delta^{n+1}\big(\Delta(f)\big),$$

  pour $x \in \mathbb{R}$, nous déduisons qe $\mathcal{Q}_n$ appliquée à $g = \Delta(f)$ que

  $$\Delta^{n+2}(f)(x) = \Delta^{n+1}\big(\Delta(f)\big)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \underbrace{\Delta(f)}_{g}(t)\mathrm{d}t$$

  Comme $t \mapsto \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $\Delta(f)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ (polynôme et question 3a) sur $\mathbb{R}$ et donc sur le segment $[0,x]$, il résulte d'une intégration par partie que

  $$\Delta^{n+2}(f)(x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Delta(f)(t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Delta(f)'(t)\mathrm{d}t$$

  Or, comme la question 3a induit que $\Delta(f)' = f$ et que $\Delta(f)(0) = 0$, nous obtenons que

  $$\Delta^{n+2}(f)(x) = 0 - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f(t)\mathrm{d}t$$

  En particulier, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et comme $F_n(x) = \Delta^{n+1}(x)$, cela induit bien que

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))$$