I. Comme $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0}(x+1) = 1$, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

En particulier, f est continue en 0.
De même, comme $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0} x+1 = 1$, en passant à la limite dans le taux d'accroissment, nous obtenons que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x+1} = +\infty.$$

A fortiori, f n'est pas dérivable en 0.

II.

1. La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifie

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0 \qquad (x>0).$$

   Par conséquent, φ croît strictement sur $]0,+\infty[$.
2. Il résulte du théorème de croissance comparée entre $\ln x$ et x que

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

   La fonction φ étant continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,+\infty[$ et admet, de ce fait, un unique antécédent pour 0 dans $]0,+\infty[$. Autrement dit, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$, notée β.
3. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2} = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2} \qquad (x>0).$$

4. D'après (2c), $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont même signe. Il résulte alors de (2a) et (2b) que

x	0		β		$+\infty$
$\varphi(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$	

III. 1. Comme $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et comme $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+1/x} = +\infty.$$

2. En remarquant que

$$\ln(x) - f(x) = \frac{(x+1)\ln x - x\ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{x+1},$$

il résulte du théorème de croissance comparée que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - f(x) = 0$.

IV. Avant de tracer la courbe, remarquons que f s'annule seulement en 0 et en 1 d'après l'énoncé et puisque

$$f(x) = 0 \iff x\ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1 \qquad (x > 0).$$

Nous observons également que $f(\beta) = -\beta$. En effet la relation $\varphi(\beta) = 0$ induit d'une part que $\ln(\beta) = -1 - \beta$ et d'autre part que

$$f(\beta) = \frac{\beta\ln\beta}{\beta+1} = \frac{\beta(-1-\beta)}{\beta+1} = -\beta.$$