CORRECTION DEVOIR MAISON 5

1. Le vecteur $\vec{e}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ car

$$\begin{aligned} -2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c} &= (-2\vec{a}-4\vec{b}-6\vec{p})+(5\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}+2\vec{p})+(-4\vec{a}+10\vec{b}+2\vec{c}+8\vec{p}) \\ &= (3\vec{u}+7\vec{v}-\vec{W}+4\vec{p})=\vec{e} \end{aligned}$$

2. La famille $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e})$ est liée d'après la relation de dépendance linéaire trouvée en 1 :

$$-2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}+0\vec{d}-\vec{e}=\vec{0}$$

3. *Avec les matrices, il suffira de prouver que le rang de la famille est égal à 4)*
Soient $(A,B,C,D)\in\mathbb{R}^4$ et $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ résolvons le système suivant (il faut montrer qu'il admet une unique solution)

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+t\vec{d}=A\vec{u}+B\vec{v}+C\vec{w}+D\vec{p}$$

Comme $(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{w})$ est une base de E, en identifiant les coefficients de ces vecteurs, nous remarquons que cette équation est équivalente au système

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{lllll} \boxed{-x} & +5y & -2z & +4t & =A \\ 2x & +y & +5z & +t & =B \\ & -3y & +z & +2t & =C \\ 3x & +2y & +4z & -2t & =D \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lllll} \boxed{-x} & +5y & -2z & +4t & =A \\ & +11y & +z & +9t & =B+2A \\ & -3y & \boxed{+z} & +2t & =C \\ & +17y & -2z & 10t & =D+3A \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lllll} \boxed{-x} & -y & & +8t & =A+2C \\ & +14y & & \boxed{+7t} & =B+2A-C \\ & -3y & \boxed{+z} & +2t & =C \\ & +11y & & +14t & =D+3A+2C \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lllll} \boxed{-x} & -y & & +8t & =A+2C \\ & +14y & & \boxed{+7t} & =B+2A-C \\ & -3y & \boxed{+z} & +2t & =C \\ & -17y & & & =D+3A+2C-2(B+2A-C) \end{array}\right.$$

Il résulte du dernier système obtenu (par un pivot partiel), qu'il existe une unique solution à ce système : La quatrième ligne donne un unique y, puis la deuxième ligne donne un unique t, puis les lignes une et deux donnent un unique x et un unique z, de sorte qu'il existe un unique quadruplet (x,y,z,t) solution de ce système, quelque soit le quadruplet (A,B,C,D) choisi. En particulier, la famille est génératrice. Et il suffit de prendre $A=B=C=D=0$ pour déduire de l'unique solution $x=y=z=t=0$ du système obtenu qu'elle est également libre. En conclusion, la famille $(\vec{a},\vec{b}\vec{c},\vec{d})$ est une base de E.

4. *Au brouillon, pour trouver les coordonnées de $\vec{p}=0.\vec{u}+0.\vec{v}+0.\vec{c}+1.\vec{p}$ dans la base $(\vec{a},\vec{b}\vec{c},\vec{d})$, on reexploite le système précédent pour $A=B=C=0$ et $D=1$, ce qui donne $-17y=1$ d'ou $y=\frac{-1}{17}$, puis $14y+7t=0=\frac{-14}{17}+7t=0$ ce qui donne $t=\frac{2}{17}$ puis $-x-y+8t=0$ ce qui donne $-x+\frac{1}{17}+\frac{16}{17}=0$ soit $x=1=\frac{17}{17}$*

et $-3y+z+2t=0$ *ce qui donne* $\frac{3}{17}+z+\frac{4}{17}=0$ *et donc* $z=\frac{-7}{17}$. *Et ensuite, sur sa copie, on écrit juste que* Nous remarquons que

$$\begin{aligned} 17\vec{a}-1\vec{b}-7\vec{c}+2\vec{d} &= (-17-5+14+8)\vec{u}+(34-1-35+2)\vec{v} \\ &\quad +(0+3-7+4)+(51-2-28-4) \\ &= 0.\vec{u}+0.\vec{v}+0.\vec{c}+17.\vec{p} \end{aligned}$$

A fortiori, nous obtenons que

$$\vec{p}=\vec{a}-\frac{1}{17}\vec{b}-\frac{7}{17}\vec{c}+\frac{2}{17}\vec{d}$$

Pour plus tard : la matrice des coordonnées de $\vec{p}$ *dans la base* $(\vec{a},\vec{b}\vec{c},\vec{d})$ *est*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{17} \\ -\frac{7}{17} \\ \frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

5. La famille $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est génératrice de $\mathbb{F}$, par définition de $\mathbb{F}$. Comme $(\vec{a},\vec{b}\vec{c},\vec{d})$ est une base, la sous-famille $(\vec{a},\vec{b}\vec{c})$ est nécéssairement libre. A fortiori, $(\vec{a},\vec{b}\vec{c})$ est une base de $\mathbb{F}$.
6. Le vecteur $\vec{d}$ ne peut pas appartenir à $\mathbb{F}$ car sinon, il existerait une relation de dépendance linéaire entre $\vec{a}$, $_vecb$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ ce qui contredirait qu ces vecteurs forment une base de E.

   Par contre, le vecteur $\vec{e}$ appartient à $\mathbb{F}$ d'après la relation $\vec{e}=-2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$ établie à la question 1. En particulier, la matrice des coordonnées de $\vec{e}$ dans la base $(\vec{a},\vec{b}\vec{c})$ est

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. Nous remarquons que les vecteurs de G sont les vecteurs de la forme

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (4\alpha-2\beta)\vec{u}+(\alpha+5\beta)\vec{v}+(2\alpha+\beta)\vec{w}+(-2\alpha+4\beta)\vec{p} \\ &= \alpha(4\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}-2\vec{p})+\beta(-2\vec{u}+5\vec{v}+\vec{w}+4\vec{p}) \\ &= \alpha\vec{d}+\beta\vec{c} \end{aligned}$$

   En particulier, nous avons

$$G=\mathrm{Vect}\left(\vec{c},\vec{d}\right)$$

   Il résulte de cette identité que G est un sous-espace vectoriel de E, dont une famille génératrice est $(\vec{c},\vec{d})$. Comme cette famille est nécéssairement libre (sinon, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ ne serait pas une base, nous concluons que $(\vec{c},\vec{d})$ est une base de G
8. Procédons à une élimination pour obtenir une équation cartésienne de G (ce qui devrait nous aider)

$$
\begin{aligned}
& x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}+t\vec{p}\in G \\
\iff\ & \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}+t\vec{p}=(4\alpha-2\beta)\vec{u}+(\alpha+5\beta)\vec{v}+(2\alpha+\beta)\vec{w}+(-2\alpha+4\beta)\vec{p} \\
\iff\ & \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} x &= 4\alpha-2\beta \\ y &= \boxed{\alpha}+5\beta \\ z &= 2\alpha+\beta \\ t &= -2\alpha+4\beta \end{cases} \\
\iff\ & \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} x-4y &= -22\beta \\ y &= \boxed{\alpha}+5\beta \\ z-2y &= -9\beta \\ t+2y &= \boxed{14\beta} \end{cases} \\
\iff\ & \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} 14(x-4y)+22(t+2y) &= 0 \\ y &= \boxed{\alpha}+5\beta \\ 14(z-2y)+9(t+2y) &= 0 \\ t &= \boxed{14\beta} \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} 14(x-4y)+22(t+2y) &= 0 \\ 14(z-2y)+9(t+2y) &= 0 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} 14x-12y+22t &= 0 \\ 14z-10y+9t &= 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

En particulier, nous obtenons que

$$G=\{x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}+t\vec{p} : (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, 14x-12y+22t=0 \text{ et } 14z-10y+9t=0\}$$

Avec cette expression de G, il est alors facile de voir que $\vec{e_m}$ appartient à G si, et seulement si,

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} 14((2m-2)-12(2-m))+22(8+m) &= 0 \\ 14(5+3m)-10(2-m)+9(8+m) &= 0 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} 62m+124=0 \\ 61m+122=0 \end{cases} \\
\iff\ & m=-2
\end{aligned}
$$

Le vecteur $\vec{e_m}$ appartient à G si et seulement si $m=-2$.

9. Pour $m\in\mathbb{R}$, la famille $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e_m})$ est liée car $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ forme une base de E, de sorte que $\vec{e_m}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de ces quatres vecteurs.
10. La famille $(\vec{c},\vec{d},\vec{e_m})$ est libre *ssi* $\vec{e_m}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$, c'est à dire *ssi* $\vec{e_m}$ n'apartient pas à $G=\mathrm{Vect}(\vec{c},\vec{d})$, c'est à dire pour $\mathbb{R}$ privé des valeurs obtenues à la question 8 (c'est à dire -2). En conclusion, la famille $(\vec{c},\vec{d},\vec{e_m})$ est libre pour $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.