DEVOIR SURVEILLE 1

Exo I. Déterminer l'unique suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \qquad (n \geqslant 0)$$

Exo II. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k!, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k! \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$$

1. a. Justifier que $(k+1)! - k! = k \times k!$ pour $k \geqslant 1$.
   b. En déduire une expression simple de U_n en fonction de n.
2. Montrer que $S_n = 2 + (n-2) \times (n+1)!$ pour $n \geqslant 1$.
3. Pour $n \geqslant 1$, exprimer S_n en fonction de T_n et U_n.
4. En déduire une expression simple de $\frac{T_n}{(n+1)!}$ en fonction de n.

Exo III. **Edhec E**

1. Montrer que $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. a. Etudier les variations de la fonction g définie par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   b. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
3. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$$

   Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
4. a. Montrer que $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   b. En déduire le signe de f sur D_f.
5. Déterminer les limites de f en $-\infty$, 0 et $+\infty$.
6. Exprimer f' en fonction de g
7. Dresser le tableau de variation complet de f
8. a. Vérifier que $f(x) - x = f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
   b. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   c. L'équation $f(x) = x$ a t'elle des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$?
9. Représenter sur un même graphique la droite d'équation $y = x$ puis l'allure de f
10. On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   a. Montrer que $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   b. Montrer que la suite u converge. On note ℓ sa limite
   c. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 0$.

Exo IV. On rappelle qu'une suite croissante converge si, et seulement si, elle est majorée.
Question préliminaire. Prouver que

$$\ln(1+x) \leqslant x \qquad (x > -1)$$

A. **Un exemple numérique.**
On définit les suites $(R_n)_{n\geqslant 0}$, $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad S_n = R_n + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad T_n = R_{n-1} + \frac{1}{n}$$

1. a. Montrer que les suites S et T sont adjacentes (c'est à dire que l'une croît, l'autre décroît et leur différence tend vers 0)
   b. En déduire que la suite R converge vers un nombre réel ℓ.
2. Montrer que $0 \leqslant S_n - \ell \leqslant \frac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$

B. **Etudes d'exemples de suites produits**

1. On pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$
   a. Calculer p_1, p_2, p_3.
   b. Exprimer p_n en fonction de n et donner sa limite
2. On pose $q_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$
   Déterminer une expression simplifiée de q_n en fonction de n. En déduire que la suite q converge vers $\frac{1}{2}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k\mathbb{Z}\}$, on pose $r_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$
   a. Etablir que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$
   b. En utilisant que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$r_n \times \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \times \sin(a) \qquad (n \geqslant 1)$$

   c. Déterminer la limite de la suite r.

C. **Etude générale**. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant $u_n > -1$ pour $n \geqslant 0$. Alors, on pose

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) \qquad \text{et} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + u_k) \qquad (n \geqslant 0).$$

1. a. En considérant le quotient $\frac{p_n}{p_{n-1}}$, montrer que si la suite p converge vers un réel non nul, alors la suite u converge vers 0.
   b. La réciproque est elle vraie ? *(on pourra s'aider de la partie B)*
2. a. Exprimer s_n en fonction de p_n

b. Montrer que la suite p converge vers un réel non nul si, et seulement si, la suite s converge.

3. On suppose que u est une suite positive et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

   a. Etudier la monotonie des suites s et S.
   b. Montrer que $s_n \leqslant S_n$ pour $n \geqslant 0$.
   c. En déduire que si la suite S converge alors la suite p converge

D. **Applications, exemples**

1. On pose $p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que la suite p converge
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que la suite S diverge.

   Que peut on dire de plus concernant cette suite ?
3. On pose $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a^n)$ ou $a > 0$.

   a. Déterminer la nature (convergente ?) de la suite p si $a \geqslant 1$.
   b. Déterminer la nature de la suite p si $0 < a < 1$.