CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 1

Exo I. La suite u satisfait une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $0 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. A fortiori, il existe deux (uniques) constantes réelles λ et μ telles que

$$u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n \qquad (n \geqslant 0)$$

Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$, en faisant $L_1 + L_2$ et $2L_1 - L_2$ il vient

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ -\lambda + 2\mu & = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\mu & = 3 \\ 3\lambda & = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu & = 1 \\ \lambda & = -1 \end{cases}$$

Comme $\lambda = -1$ et $\mu = 1$ vérifie le système de départ ($\Longleftrightarrow$), en reportant dans la relation pour u_n, il suit

$$u_n = -(-1)^n + 2^n \qquad (n \geqslant 0)$$

Exo II. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k!, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k! \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$$

1. a. Pour $k \geqslant 1$, on factorise $k!$ pour obtenir que

$$(k+1)! - k! = (k+1) \times k! - k! = (k+1-1)k! = k \times k!$$

b. En reportant dans la définition de U_n, nous obtenons que

$$\begin{aligned} U_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\ &= \textstyle\sum_{\ell=2}^{n+1} \ell! - \sum_{k=1}^{n} k! \qquad (\text{CDI } \ell = k+1) \\ &= \textstyle\sum_{\ell=2}^{n} \ell! + (n+1)! - \left(1! + \sum_{k=2}^{n} k!\right) \qquad (\text{relation de Chasles}) \\ &= (n+1)! - 1 \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \qquad S_n = 2 + (n-2) \times (n+1)!$$

- P_1 est vraie car $S_1 = \sum_{k=1}^{1} (k-1)^2 k! = 0^2 1! = 0 = 2 + (-2) \times 1!$
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 1$ et montrons P_{n+1}. Alors, d'après P_n, nous avons

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^2 k! = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k! + (n+1-1)^2 (n+1)! \\ &= S_n + n^2 (n+1)! \\ &= 2 + (n-2) \times (n+1)! + n^2 (n+1)! \\ &= 2 + (n-2+n^2) \times (n+1)! \\ &= 2 + (n-1)(n+2) \times (n+1)! \qquad (\text{ruse : se laisser guider par ce que l'on doit trouver }) \\ &= 2 + (n-1) \times (n+2)! \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \geqslant 1$.

3. Pour $n \geqslant 1$, nous déduisons des définitions de S_n, T_n et U_n que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (k-1)^2 k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2-2k+1)k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2+1)k! - 2\sum_{k=1}^n k \times k! \\ &= T_n - 2U_n \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

4. Il résultedes résultats obtenus aux questions 1b, 2 et 3 que

$$\begin{aligned} T_n &= S_n + 2U_n \\ &= 2 + (n-2) \times (n+1)! + 2\left((n+1)! - 1\right) \\ &= n(n+1)! \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que

$$\frac{T_n}{(n+1)!} = n \qquad (n \geqslant 1).$$

Exo III. Edhec E

1. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $\mathrm{e}^0 = 1$, il vient $\mathrm{e}^x < 1$ pour $x < 0$ et $\mathrm{e}^x > 1$ pour $x > 0$ de sorte que $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} > 0$ lorsque $x < 0$ mais aussi lorsque $x > 0$. En conclusion, on a

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

2. a. La fonction g définie par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$g'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x,$$

qui est du signe de x. En particulier (pas de tableau de variation car c'est trop pénible à dactylographier, mais sur votre copie, j'espere que vousen avez dessiné un) g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b. Comme $g(0) = 0\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$, il résulte du résultat précédent que $g(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $g(0) = 0$. (le TAB de var précédent répondait aussi à cette question)

3. Comme le logarithme est défini sur $]0, +\infty[$ et comme on a une division, le résultat de la question 2b induit que

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} > 0 \end{cases} \iff x \neq 0$$

En particulier, on a $Df = \mathbb{R}^*$.

4. a. Remarquons que $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x \iff \mathrm{e}^x - 1 - x \geqslant 0$. Comme la fonction $h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme $h'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ est du signe de x (d'après le résultat de la question 1), la fonction h est décroissante sur

$]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Comme $h(0)=0$, on en déduit que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$ et par suite que

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1+x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

Une solution beaucoup plus tordue (mais qui recycle un résultat précédent) :

$\mathrm{e}^x \geqslant 1+x \iff \mathrm{e}^x-1-x \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x\left(1-\mathrm{e}^{-x}-xe^{-x}\right)\geqslant 0 \iff g(-x)\mathrm{e}^x \geqslant 0 \iff$ vrai d'après 2b

b. D'après le résultat précédent, on a $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\geqslant 1$ pour $x>0$ et $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\leqslant 1$ pour $x<0$. Comme la fonction logarithme est croissante sur $]0,+\infty[$ et comme $\ln(1)=0$, nous en déduisons que $f(x)=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$ est positive sur $]0,+\infty[$ et négative sur $]-\infty,0[$.

5. D'après le théorème de croissance comparé, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=0$$

Par composition avec le logarithme qui tend vers $+\infty$ lorsque x tends vers $+\infty$, nous obtenons que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Comme $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=0$$

Par composition avec le logarithme qui tend vers $-\infty$ lorsque x tends vers 0, par valeurs positives, nous obtenons que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Enfin, comme

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=exp'(0)=\mathrm{e}^0=1,$$

par composition avec le logarithme qui est continu en 1, il vient

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=\ln(1)=0$$

6. La fonction f est dérivable sur $Df=\mathbb{R}^*$ et, comme c'est une composée, sa dérivée vaut

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\tfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)'\times\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}}\\ &= \frac{x\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}\times\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\\ &= \frac{x\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x-1)}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\frac{g(x)}{x(\mathrm{e}^x-1)} \qquad (x\neq 0)\end{aligned}$$

7. Trop pénible à dactylographier, je vais le décrire : f' a le même signe que $g(x) \times \frac{e^x-1}{x}$, est est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ d'après 1 et 2b. f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On complète le tableau avec les limites trouvées en 5

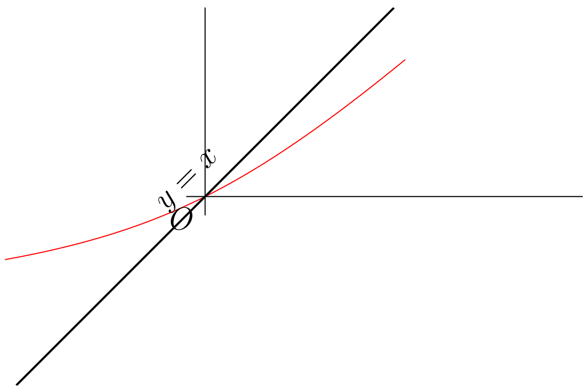
8. a. Pour $x \neq 0$, on a

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) \\
&= \ln\left(e^x\left(\frac{1-e^{-x})}{xe^x}\right)\right. \\
&= \ln\left(\frac{e^x-1)}{xe^x}\right) \\
&= \ln\left(\frac{e^x-1)}{x}\right) - \ln(e^x)
\end{aligned}
$$

$$= f(x) - x \qquad (x \in \mathbb{R}^*)$$

b. $f(x) - x$ est du signe de $f(-x)$ d'après le résultat dela question précédente. De sorte que, $f(x) - x$ a le même signe sur $\mathbb{R}_+^*$ que $f(x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$ (c'est à dire négatif, d'après 7). En conclusion $f(x) - x < 0$ pour $x > 0$.

c. L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le résultat précédent.

9. 

10. On introduit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition $P_n : u_n > 0$.

- P_0 est vraie car $u_0 > 0$
- Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 0$ et montrons P_{n+1} D'après P_n, le nombre u_n est dans $\mathbb{R}_+*$. Or lafonction f est strictement positive surcet ensemble, de sorte que $u_n + 1 = f(u_n) > 0$. Donc P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Nous remarquons que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or $u_n > 0$ et $f(x) - x$ est strictement négative pour $x > 0$ d'après le résultat de la question 8b. A fortiori, $u_{n+1} - u_n < 0$ de sorte que la suite u est décroissante. Comme la suite u est décroissante et minorée par 0, d'après 10.a, elle converge.

c. Prouvons par l'absurde que $\ell = 0$. Supposons que $\ell \neq 0$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 0$, en faisant tendre n vers $+\infty$, il résulte de la conservation des inégalités larges par passage à la limite que $\ell = \lim u \geqslant 0$. Mais comme $\ell \neq 0$, il vient $\ell > 0$. De même, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation $u_n n + 1 = f(u_n)$, nous obtenons que $\ell = f(\ell)$ Ce qui est absurde (ou faux ou contradictoire) car il a été prouvé à la question 8c que l'équation $f(x) = x$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_+^*$ de sorte que ℓ ne peut pas en être une. A fortiori, la limite ℓ de la suite u est forcément nulle.

Exo IV. On rappelle qu'une suite croissante converge si, et seulement si, elle est majorée. **Question préliminaire.** Remarqons que

$$\ln(1+x) \leqslant x \Longleftrightarrow 0 \leqslant x - \ln(1+x) \qquad (x > -1)$$

Or la fonction $h(x) = x - \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ et satisfait

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Comme cettedérivée est du signe de x sur $]-1,+\infty[$, la fonction h est décroissante sur $]-1,0]$ et crissante sur $[0,+\infty[$. Mais comme $h(0) = 0 - \ln(1) = 0$, la fonction h est positive sur $]-1,+\infty[$. En particulier, nous avons montré que

$$\ln(1+x) \leqslant x \qquad (x > -1)$$

A. **Un exemple numérique.**
On définit les suites $(R_n)_{n\geqslant 0}$, $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad S_n = R_n + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad T_n = R_{n-1} + \frac{1}{n}$$

1. a. • Pour $n \geqslant 1$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= R_{n+1} + \tfrac{1}{n+1} - \left(R_n + \tfrac{1}{n}\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n} \\ &= \tfrac{n}{n(n+1)^2} + \tfrac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \tfrac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \tfrac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \tfrac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} = -\tfrac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 0 \end{aligned}$$

En particulier, la suite S est décroissante.

• De même, on a

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= R_n + \tfrac{1}{n+1} - \left(R_{n-1} + \tfrac{1}{n}\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n} \\ &= \tfrac{n+1}{n^2(n+1)} + \tfrac{n^2}{n^2(n+1)} - \tfrac{n(n+1)}{n^2(n+1)} \\ &= \tfrac{n+1+n^2-n(n+1)}{n(n+1)^2} = \tfrac{1}{n^2(n+1)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

En particulier, la suite T est croissante.

• Enfin, on a

$$\begin{aligned} S_n - R_n &= R_n + \tfrac{1}{n} - (R_{n-1} + \tfrac{1}{n}) \\ &= R_n - (R_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{k^2} \\ &= \tfrac{1}{n^2} \end{aligned}$$

En particulier la suite $S - R$ tends vers 0

En conclusion, les suites S et R sont adjacentes

b. Comme les suites S et T sont adjacentes, elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $R_n = S_n - \frac{1}{n}$, nous remarquons que la suite R converge également vers ℓ.

2. Cette question est difficile si l'on ne connait pas bien les particularités des suites adjacentes : Comme nous avons précédemment prouvé S était décroissante et convergeait vers ℓ, nous avons $S_n \geqslant \ell$ de sorte que $S_n - \ell \geqslant 0$. (on peut remarquer que $u_n - u_k \geqslant 0$ sir $k > n$ et en faisant tendre k vers $+\infty$, il résulte de la conservation des inégalités larges par passage à la limite que $u_n - \ell \geqslant 0$). Mais nous avons aussi montré que T était croissante et convergeait vers ℓ de sorte que $T_n \leqslant \ell$. A fortiori, nous remarquons que

$$S_n - \ell \leqslant S_n - \ell + \underbrace{\ell - T_n}_{\geqslant 0} = S_n - T_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{(calculé en 1a)}$$

En conclusion, nous aons prouvé que $0 \leqslant S_n - \ell \leqslant \frac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

B. **Etudes d'exemples de suites produits**

1. On pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$

a. On appliquant la formule de p_n pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$, il vient

$$\begin{aligned} p_1 &= \prod_{k=1}^{1} \tfrac{k+1}{k} = \tfrac{2}{1} = 2 \\ p_2 &= \prod_{k=1}^{2} \tfrac{k+1}{k} = \tfrac{2}{1} \times \tfrac{3}{2} = 3 \\ p_3 &= \prod_{k=1}^{3} \tfrac{k+1}{k} = \tfrac{2}{1} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

Des produits telescopiques...

b. En remarquant que p_n est un produit téléscopique, il vient

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{k=1}^{n} \tfrac{k+1}{k} \\ &= \tfrac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k} \\ &= \tfrac{\prod_{\ell=2}^{n+1} \ell}{\prod_{k=1}^{n} k} \\ \text{(CDI } \ell = k+1) \quad &= \tfrac{\prod_{\ell=2}^{n} \ell \times (n+1)}{1 \times \prod_{k=2}^{n} k} \\ &= \tfrac{(n+1)}{1} = n + 1 \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

Par passage à la limite, nous concluons que $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty}(n + 1) = +\infty$.

2. Mêmes techniques, c'est encore un produit telescopique. Pour $n \geqslant 1$, nous remarquons que

$$
\begin{aligned}
q_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\\
&= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\times\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k^2}\\
&= \frac{\prod_{\ell=1}^{n-1}\ell\times\prod_{j=3}^{n+1}j}{\left(\prod_{k=2}^{n}k\right)^2} \qquad \text{CDI } \ell=k-1 \text{ et } j=k+1\\
&= \frac{1\times 2\times\prod_{\ell=3}^{n-1}\ell\times\prod_{j=3}^{n-1}j\times n\times(n+1)}{\left(2\times\prod_{k=3}^{n-1}k^2\times n\right)^2}\\
&= \frac{1\times 2\times n\times(n+1)}{2^2\times n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \qquad (n\geqslant 1)
\end{aligned}
$$

En particulier, nous remarquons que la suite q converge vers $\frac{1}{2}$.

3. Soit $a\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi : k\mathbb{Z}\}$, on pose $r_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$

a. En faisant la limite du taux d'accroissement, nous obtenons que

$$
\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin x}{x} == \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0} = \sin'(0)=\cos(0)=1
$$

b. Pour $n\in\mathbb{N}*$, prouvons par récurrence la proposition

$$
P_n : \qquad r_n\times\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\times\sin(a)
$$

- P_1 est vraie car en appliquant la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ pour $x=\frac{a}{2}$, nous obtenons que

$$
\begin{aligned}
r_1\times\sin\tfrac{a}{2} &= \prod_{k=1}^{1}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\times\sin\tfrac{a}{2}\\
&= \cos\left(\tfrac{a}{2}\right)\times\sin\tfrac{a}{2}\\
&= \tfrac{1}{2}\sin\left(2\times a^F 2\right) = \tfrac{1}{2}\sin(a)
\end{aligned}
$$

- Supposons P_n pour un entier $n\geqslant 0$ et montrons P_{n+1}. D'après la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ pour $x=\frac{a}{2^{n+1}}$ et P_n, nous avons

$$
\begin{aligned}
r_{n+1}\times\sin\left(\tfrac{a}{2^{n+1}}\right) &= \prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\times\sin\left(\tfrac{a}{2^{n+1}}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\times\cos\left(\tfrac{a}{2^{n+1}}\right)\times\sin\left(\tfrac{a}{2^{n+1}}\right)\\
&= r_n\times\cos\left(\tfrac{a}{2^{n+1}}\right)\times\sin\left(\tfrac{a}{2^{n+1}}\right)\\
&= r_n\times\tfrac{1}{2}\sin\left(2\times\tfrac{a}{2^{n+1}}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}r_n\times\sin\left(\tfrac{a}{2^n}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2^n}\times\sin(a) = \tfrac{1}{2^{n+1}}\sin(a)
\end{aligned}
$$

En particulier, P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n\in\mathbb{N}$.

c. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$
r_n = \frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\sin(a) = \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\frac{\sin(a)}{a}
$$

En posant $X = \frac{a}{2^n}$, nous remarquons que X tends vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$ et nous déduisons du résultat de la question 3a que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \lim_{X\to 0} \frac{x}{\sin(X)} = \frac{1}{\lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X}} = \frac{1}{1} = 1$$

En particulier, la suite r converge vers $\frac{\sin(a)}{a}$

C. **Etude générale**. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant $u_n > -1$ pour $n \geqslant 0$. Alors, on pose

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) \qquad \text{et} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k) \qquad (n \geqslant 0).$$

1. a. En considérant le quotient $\frac{p_n}{p_{n-1}}$, montrer que Si la suite p converge vers un réel non nul ℓ, alors le quotient $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell} = 1$. Or, nous remarquons que

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+u_k)} = (1+u_n)$$

De sorte que la suite $1+u$ converge vers 1 et la suite u converge vers 0.

b. La réciproque est fausse d'après le résultat de la question B.1b qui montre que pour la suite $u_n = \frac{1}{n}$, qui tend vers 0, le produit $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$ diverge vers $+\infty$

2. a. Le produit p_n étant srictement positif, en tant que produit de nombres $1+u_k > 0$, nous remarquons que

$$\ln(p_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right) = \sum \ln(1+u_k) = s_n \qquad (n \geqslant 0)$$

b. Procédons par double implication.

- Supposons que la suite p converge vers un réel non nul ℓ. Comme p est une suite positive, il vient $\ell > 0$. Comme le logarithme est continu en ℓ, il résulte de la question précédente que la suite s converge vers $\ell' = \ln(\ell)$ et donc que s converge.

- Réciproquement, supposons que la suite s converge vers un nombre réel ℓ'. Alors, comme $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$ et comme la fonction exponentielle est continue en ℓ', la suite p converge vers $\ell = \mathrm{e}^{\ell'} > 0$.

En conclusion, la suite p converge vers un réel non nul si, et seulement si, la suite s converge.

3. On suppose que u est une suite positive et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

a. Comme $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$, la suite S est croissante. De même, comme

$$s_{n+1} - s_n = \ln(1 + \underbrace{un+1}_{\geqslant 0}) \geqslant \ln(1) = 0$$

par croissance du logarithme, la suite s est également croissante.

b. En appliquant le résultat de la question préliminaire à $x = u_k > -1$ pour $k \geqslant 1$, il vient

$$\ln(1 + u_k) \leqslant u_k \qquad (k \geqslant 1).$$

En sommant ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n$, il vient

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + u_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k = S_n \qquad (n \geqslant 0)$$

c. Si la suite S converge, alors la suite S est majorée (une suite convergente est majorée) de sorte que la suite s est également majorée. comme elle est croissante, la suite s converge alors nécéssairement vers un nombre réel et il résulte alors du résultat de la question C2b que la suite p converge (vers un nombre réel non nul).

D. **Applications, exemples**

1. Dans cet exemple, la suite $u_k = \frac{1}{k^2}$ est positive et il résulte de l'étude menée à la partie A que la suite

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} u_k = S_n$$

converge vers un nombre réel ℓ. A fortiori, nous déduisons de l'étude générale (C3c) que la suite $p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ associée converge (vers un nombre réel non nul)

2. Cette fois, nous déduisons de l'étude réalisée en B1b que la suite

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

diverge vers $+\infty$. De sorte que d'après le résultat établi en C2b, d'une part la suite croissante

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

ne peut pas converger et d'autre part, elle diverge vers $+\infty$. A fortiori, il résulte de l'implication établie en C.3c d'une part que la suite croissante

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ne peut pas converger et d'autre part qu'elle diverge vers $+\infty$.

3. On pose $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a^n)$ ou $a > 0$.

a. Si $a \geqslant 1$, on a $a^n \geqslant 1$ de sorte que la suite $u_n = a^n$ ne peut pas tendre vers 0. Il résulte alors de l'implication établie au C1a que la suite p ne peut pas converger (elle diverge vers $+\infty$).

b. Si $0 < a < 1$, La suite $u_k = a^k$ est positive et la somme des termes de la suite géométrique (de raison $a \neq 1$) donne par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

converge vers $\frac{a}{1-a}$ lorsque n tends vers $+\infty$. A fortiori, il résulte de C3c que la suite

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^k\right)$$

converge.