

DEVOIR SURVEILLE 2

Exo I. Dans cet exercice, on établit un encadrement classique de $n!$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x$

a. Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$ et établir que

$$f'(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

b. Etablir les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire le signe de f .

2. Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par $g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$.

a. Montrer que g est dérivable sur $[0,1[$ et établir que

$$g'(x) = \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2}$$

b. Etablir les variations de g sur $[0,1[$ et en déduire le signe de g .

3. Déduire des questions précédentes l'encadrement

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)} \quad (0 \leq x < 1)$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, utiliser $x = \frac{1}{2n+1}$ pour établir l'encadrement

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - 1 \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

5. On définit deux suites a et b en posant

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

- a. Etablir que $0 < a_n < b_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
b. Montrer que la suite a est croissante puis que la suite b est décroissante
c. En déduire qu'il existe un unique réel $C > 0$ tel que

$$a_n \leq C \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Puis que

$$\frac{1}{C} n^n \sqrt{n} e^{-n} \leq n! \leq \frac{1}{C} n^n \sqrt{n} e^{-n+\frac{1}{12n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exo II. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2xe^x$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. Donner les tableaux des variations de f et de f^{-1} , la bijection réciproque de f .
2. Montrer qu'il existe dans $]0,1[$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^\alpha = 1$.
On définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \quad (n \geq 0)$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que u_n existe et que $u_n \in [0,1]$
4. a. Pour $0 \leq x \leq 1$, prouver que $f(x) - x \geq 0$ et vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
b. En déduire que la suite u est strictement décroissante
c. En déduire que la suite u converge vers 0.
5. On se propose de préciser ce résultat.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- a. Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- b. En déduire que $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$
- c. Montrer que $u_n \leq \frac{1}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que la suite (S_n) converge vers une limite finie L , qui satisfait

$$\alpha \leq L \leq 2$$

- d. Montrer qu'il existe une suite (β_n) de limite 1 telle que

$$u_n = \frac{e^{-L}}{2^n} \times \beta_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exo III. Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : il possède trois faces numérotées 1 et trois faces numérotées 6. On tire de l'urne au hasard et simultanément deux dés, puis on les lance. On note

- A l'événement « les deux dés sont normaux »
 - B l'événement « les deux dés montrent chacun une face six »
1. Calculer les probabilités des événements A et $\overline{A}$.
 2. Calculer la probabilité de B sachant que A est réalisé. En déduire la probabilité de l'événement $A \cap B$
 3. Calculer la probabilité de l'événement B
 4. Calculer la probabilité de A sachant que B est réalisé

Exo IV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $2n$ lancers indépendants d'une pièce truquée où la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.

1. Déterminer l'univers des possibles Ω et introduire des événements élémentaires liés à l'expérience (*au besoin, introduire vos notations, poser des lettres...*).
2. Pour $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on introduit l'événement $A_i = \ll$ on obtient pile pour la première fois au lancer $i \gg$, ainsi que l'événement $A_0 = \ll$ on n'obtient aucun pile $\gg$.
 - a. Calculer $P(A_i)$ pour $0 \leq i \leq 2n$ (*On pensera à distinguer le cas $i = 0$*).
 - b. Vérifier par le calcul que $\sum_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$. Comment aurait-on pu faire sinon ?
3. Pour $j \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$, on introduit l'événement $B_j = \ll$ pour la première fois, on obtient deux résultats identiques aux lancers $j - 1$ et $j \gg$.
 - a. Expliciter B_2 , B_3 et B_4 .
 - b. Expliciter alors B_{2j} et B_{2j+1} pour $j \geq 1$.
 - c. En déduire leur probabilité

Exo V. Mlle X souhaite ranger, côte à côte, 6 livres sur une étagère :

- $B_1 = \ll$ Le club des cinq et le trésor de l'île $\gg$ de Enyd Blyton;
 - $B_2 = \ll$ Le club des cinq en vacances $\gg$ de Enyd Blyton;
 - $R_1 = \ll$ Harry Potter à l'école des sorciers $\gg$ de J. K. Rowling;
 - $R_2 = \ll$ Harry Potter et la chambre des secrets $\gg$ de J. K. Rowling;
 - $S_1 = \ll$ Les malheurs de Sophie $\gg$ de la Comtesse de Ségur;
 - $S_2 = \ll$ Les vacances $\gg$ de la Comtesse de Ségur.
1. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
 2. Combien y a-t-il de dispositions possibles de sorte que les livres de la même autrice soient à côté l'un de l'autre ?
 3. Combien y a-t-il de dispositions possibles de sorte que les livres avec le mot «vacances» dans le titre soient à côté l'un de l'autre ?
 4. Combien y a-t-il de dispositions possibles de sorte que les livres avec le mot «vacances» dans le titre soient aux deux extrémités de l'étagère ?
 5. Mlle X compte en emporter trois en vacances. Combien de possibilités a-t-elle ?
 6. Mlle X compte en emporter trois en vacances dont « Les malheurs de Sophie ». Combien de possibilités a-t-elle sachant qu'elle souhaite également en avoir deux de la même autrice ?