

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 2

- Exo I.** 1. a. La fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est définie et dérivable sur $[0,1[$ en tant que quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions définies et dérivables (des polynômes). De plus, elle est à valeurs strictement positive sur cet intervalle. Par composition avec le logarithme qui est défini et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est définie et dérivable sur $[0,1[$. Comme l'application polynomiale $x \mapsto x$ l'est aussi, par combinaison linéaire, nous concluons que f est définie et dérivable sur $[0,1[$. Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} - 1 \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} - 1 = \frac{1+x}{1-x^2} - 1 \\ &= \frac{x^2}{1-x^2} \quad (0 \leq x < 1) \end{aligned}$$

- b. Comme la dérivée de f est nulle en 0 et strictement positive sur $]0,1[$, la fonction f est strictement croissante sur $[0,1[$. Comme $f(0) = \frac{1}{2} \ln(1) - 0 = 0$, la fonction f est nulle en $x = 0$ et strictement positive sur $]0,1[$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par $g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$.
- a. La fonction $h : x \mapsto \frac{x^3}{3(1-x^2)}$ est définie et dérivable sur $[0,1[$ en tant que quotient de fonctions définies et dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas, sur $[0,1[$ (des polynômes encore). Comme $g = f - h$, la fonction g est définie et dérivable sur $[0,1[$ en tant que différence de fonctions définies et dérivables sur $[0,1[$. Enfin, nous remarquons que

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - \frac{3x^2 \times 3(1-x^2) - (-6x)x^3}{9(1-x^2)^2} \\ &= \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{9x^2 - 3x^4}{9(1-x^2)^2} \\ &= \frac{3x^2(1-x^2)}{3(1-x^2)^2} - \frac{3x^2 - x^4}{3(1-x^2)^2} \\ &= \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

- b. Comme $g'(x)$ est nulle pour $x = 0$ et strictement négative pour $0 < x < 1$, la fonction g est strictement décroissante sur $[0,1[$.
En remarquant que $g(0) = \frac{1}{2} \ln(1) - 0 - 0 = 0$, nous obtenons alors que g est nulle en 0 et strictement négative sur $]0,1[$.
3. Comme f est positive sur $[0,1[$, il vient

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \quad (0 \leq x < 1)$$

Comme g est négative sur $[0,1[$, il vient

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x - \frac{x^3}{3(1-x^2)} \leq 0 \quad (0 \leq x < 1)$$

En faisant passer le quotient de droite à droite de l'inégalité, il vient

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)} \quad (0 \leq x < 1)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant $x = \frac{1}{2n+1} \in [0,1[$ dans l'encadrement de la question précédente, nous obtenons que

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} \right) - \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3}{3 \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)}$$

En multipliant par $2n+1 > 0$ et en simplifiant (on multiplie en haut et en bas par $(2n+1)$ dans les fractions), il suit

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{2n+1+1}{2n+1-1} \right) - 1 \leq (2n+1) \frac{1}{3(2n+1)((2n+1)^2 - 1)}$$

C'est à dire que

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{2n+2}{2n} \right) - 1 &\leq \frac{1}{3(4n^2+4n)} \\ &\leq \frac{1}{12} n^2 + n \\ &\leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

5. On définit deux suites a et b en posant

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme a_n est obtenu comme produit et quotient de nombre strictement positifs, on a $a_n > 0$. Par ailleurs, comme $\frac{1}{12n} > 0$, la croissance stricte de l'exponentielle et l'égalité $e^0 = 1$ induisent que $e^{\frac{1}{12n}} > 1$, de sorte que $b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}} > a_n$.
- b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous déduisons de l'inégalité obtenu à la question précédente que

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} e^{n-(n+1)} \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{(n+1)} e^{-1} (n+1) \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= e^{-1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \\ &= e^{-1+(n+\frac{1}{2}) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)} \geq e^0 = 1 \end{aligned}$$

Comme a est une suite strictement positive vérifiant $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite a est croissante. De même, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}{e^{\frac{1}{12n}}} \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_n} e^{\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}} \\
&= e^{-1 + (n + \frac{1}{2}) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} e^{\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}} \\
&= e^{-1 + (n + \frac{1}{2}) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)} \leq e^0 = 1
\end{aligned}$$

Comme b est une suite strictement positive vérifiant $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite b est décroissante.

- c. D'après l'inégalité obtenue en 5a, b est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $L \geq 0$. Comme $a_n = b_n e^{\frac{1}{12n}}$ pour $n \geq 1$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{12n}} = 1$, nous remarquons que la suite a converge également, vers la même limite L que b . Nous remarquons que les suites a et b sont adjacentes, avec a croissante et b décroissante. Comme a tends en croissant vers L et comme b tends en décroissant vers L , il vient

$$0 \leq a_n \leq L \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Nous avons donc prouvé l'existence d'un nombre réel $C = L \geq a_1 > 0$, qui convient. Comme a et b convergent toutes les deux vers L , en passant à la limite dans l'inégalité

$$a_n \leq C \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

il résulte du principe des gendarmes que ce nombre C vaut nécessairement L (d'où l'unicité de C). A fortiori, il existe un unique réel $C > 0$ tel que

$$a_n \leq C \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

En reportant la définition de $a_n = \frac{n^n \sqrt{n} e^{-n}}{n!}$ et de $b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}$ dans cette inégalité, il vient

$$\frac{n^n \sqrt{n} e^{-n}}{n!} \leq C \leq \frac{n^n \sqrt{n} e^{-n + \frac{1}{12n}}}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

A fortiori (en isolant la factorielle en faisant passer des trucs à gauche et à droite), nous concluons que

$$\frac{1}{C} n^n \sqrt{n} e^{-n} \leq n! \leq \frac{1}{C} n^n \sqrt{n} e^{-n + \frac{1}{12n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Pour info, d'après la formule de Stirling, il existe une suite (β_n) de limite 1 telle que

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n \sqrt{n} e^{-n} \beta_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \beta_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Ce qui donne une meilleure idée de la grandeur de $n!$, de la vitesse à laquelle $n!$ tends vers $+\infty$.

Exo II. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2xe^x$

1. La fonction f est définie et dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. De plus, on a

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x = (2 + 2x)e^x > 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Comme la dérivée de f est strictement positive sur $[0,1]$, la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$. La fonction f étant continue sur cet intervalle, il résulte du théorème de la bijection que f est une bijection strictement croissante de $[0,1]$ dans $f([0,1]) = [0,2e]$. Sa bijection réciproque est alors une bijection strictement croissante (même sens de variation) de $[0,2e]$ dans $[0,1]$.

2. En remarquant que $\alpha e^\alpha = 1 \iff f(\alpha) = \frac{1}{2} \in]0, \frac{2}{e}[$, il résulte du résultat de la question précédente qu'il existe une unique solution $\alpha \in]0,1[$ de cette équation, qui est

$$\alpha = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \in]0,1[$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

P_n : u_n existe et $u_n \in]0,1[$ *c'est plus que ce qui est demandé, pour la suite*

- P_0 est vraie car $u_0 = \alpha$ existe et appartient à $]0,1[$ d'après le résultat de la question 2
- Supposons P_n pour un entier $n \geq 0$ et montrons P_{n+1} . Comme u_n existe et appartient à $]0,1[\subset]0,2e[$ et comme f^{-1} est une bijection de $]0,2e[$ dans $]0,1[$, nous remarquons que $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ existe et appartient à $]0,1[$, de sorte que P_{n+1} est vraie.

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

4. a. Il résulte de la croissance de la fonction exponentielle que

$$f(x) - x = 2xe^x - x = x(2e^x - 1) \geq x(2e^0 - 1) = x \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Par ailleurs, l'égalité ne se produit qu'en 0 car

$$f(x) - x = 2xe^x - x = x(2e^x - 1) > x(2e^0 - 1) = x > 0 \quad (0 < x \leq 1)$$

- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x = u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \in]0,1[$ de sorte que $f(x) = u_n$ et par suite

$$u_{n+1} - u_n = x - f(x) < 0$$

En particulier, la suite u est strictement décroissante (*c'est pour obtenir plus facilement la décroissance **stricte**, qu'on a eu besoin de montrer que $u_n \in]0,1[$ au lieu de $[0,1]$, il fallait enlever 0*)

- c. La suite u est décroissante et minorée par 0 (et majorée par 1), donc elle converge vers une limite finie $\ell \in [0,1]$. Par passage à la limite dans l'équation

$$f(u_{n+1}) = u_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Nous déduisons de la continuité de la fonction f en $\ell \in [0,1]$ que

$$f(\ell) = \ell$$

Or cette équation n'est satisfaite que pour $\ell = 0$ d'après le cas d'égalité de la question 4a. A fortiori, ℓ vaut forcément 0 et la suite u tends en décroissant strictement vers 0.

5. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous rappelons que l'égalité $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ induit que

$$u_n = f(u_{n+1}) = 2u_{n+1}e^{u_{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

En divisant par $2e^{u_{n+1}} \neq 0$, nous obtenons alors que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$.

- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \quad u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$$

- P_0 est vraie car la relation $\alpha e^\alpha = 1$ induit que

$$u_0 = \alpha = e^{-\alpha} = \frac{e^{-u_0}}{2^0} = \frac{e^{-S_0}}{2^0}$$

- Supposons P_n pour un entier $n \geq 0$ et montrons P_{n+1} . Il résulte du résultat de la question 5a et de P_n que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-S_n}}{2^n} e^{-u_{n+1}} \\ &= \frac{e^{-(S_n+u_{n+1})}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

A fortiori, P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

- c. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : u_n \leq \frac{1}{2^n}$$

- P_0 est vraie car $u_0 = \alpha \in [0,1]$ dont $u_0 \leq 1 = \frac{1}{2^0}$
- Supposons P_n pour un entier $n \geq 0$ et montrons P_{n+1} .
D'après le résultat de la question 5a, nous avons

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

car la croissance de la fonction exponentielle et les relations $u_{n+1} \in [0,1]$ et $e^0 = 1$ induisent que $e^{-u_{n+1}} \leq 1$. En particulier, la proposition P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite u est positive, la suite S est croissante (somme de termes positifs). Or, nous déduisons du résultat précédent et de la formule de la somme des termes d'une suite géométrique que

$$\alpha = S_0 \leq S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

La suite S étant croissante et majorée par A , elle converge vers une limite L finie. En passant à la limite dans l'inégalité

$$\alpha \leq S_n \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

nous obtenons, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, que $\alpha \leq L \leq 2$.

- d. Comme S_n converge vers $L \geq \alpha > 0$, la suite e^{-S_n} converge vers e^{-L} de sorte qu'il existe une suite (β_n) de limite 1 telle que

$$e^{-S_n} = L\beta_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

En effet, il suffit de prendre $\beta_n = \frac{e^{-S_n}}{L}$. En reportant dans l'identité obtenue à la question 5b, il vient

$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n} = \frac{e^{-L}}{2^n} \times \beta_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exo III. Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : ils possèdent six faces numérotés de 1 à 6. Le troisième est spécial : il possède trois faces numérotées 1 et trois faces numérotées 6. On tire de l'urne au hasard et simultanément deux dés, puis on les lance. On note

- A l'événement « les deux dés sont normaux »
 - B l'événement « les deux dés montrent chacun une face six »
1. En tirant 2 dés au hasard, tous les événements élémentaires sont équiprobables, il s'agit de la probabilité uniforme, de sorte que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3} \\ P(\overline{A}) &= 1 - P(A) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

En effet, l'univers des possibles est l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des trois dés... Et il n'y a qu'une façon possible de choisir les deux dés normaux

2. Sachant qu'on a pris les deux dés normaux, on jette les deux dés successivement (pour faciliter les calculs, cela nous permet d'utiliser encore la probabilité uniforme) de sorte que l'univers des possibles est $\llbracket 1,6 \rrbracket \times \llbracket 1,6 \rrbracket$ c'est-à-dire l'ensemble des 2-listes d'éléments de $\llbracket 1,6 \rrbracket$. A fortiori, on a

$$P_A(B) = \frac{1}{\binom{6}{1} \times \binom{6}{1}} = \frac{1}{36}$$

Il résulte alors de la formule de conditionnement que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{108}$$

3. Il résulte de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A, \bar{A}\}$ que

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3} \frac{1}{36} + \frac{2}{3} \frac{1}{6} \frac{3}{6} = \frac{7}{108}$$

4. *cas de figure de la formule de Bayes...* Nous remarquons que

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{7}{108}} = \frac{1}{7}$$

Exo IV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $2n$ lancers indépendants d'une pièce truquée où la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.

1. $\Omega = \{P, F\}^{2n}$. L'univers des possibles Ω est l'ensemble des $2n$ -listes d'éléments de $\{P, F\}$ (ou au 2nd semestre $\{0,1\}$)
On pose $q = 1 - p$ et $P_k =$ « on obtient Pile au $k^{\text{ème}}$ tirage » pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.
2. a. En remarquant que

$$\begin{aligned} A_0 &= \bigcap_{k=1}^n \bar{P}_k = \bar{P}_1 \cap \dots \cap \bar{P}_n \\ A_i &= P_i \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} \bar{P}_k = \bar{P}_1 \cap \dots \cap \bar{P}_{i-1} \cap P_i \quad (1 \leq i \leq 2n), \end{aligned}$$

nous déduisons de l'indépendance des lancers que

$$\begin{aligned} P(A_0) &= \prod_{k=1}^n P(\bar{P}_k) = \prod_{k=1}^n q = q^n \\ P(A_i) &= P(P_i) \times \prod_{k=1}^{i-1} P(\bar{P}_k) = p \prod_{k=1}^{i-1} q = pq^{i-1} \quad (1 \leq i \leq 2n), \end{aligned}$$

pour plus tard, il s'agit de la loi géométrique tronquée/fine

- b. En utilisant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique (pour la loi géométrique, surprise !), avec de raison $q = 1 - p \neq 1$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2n} P(A_i) &= P(A_0) + \sum_{i=1}^{2n} P(A_i) \\ &= q^n + \sum_{i=1}^{2n} pq^{i-1} \\ &= q^n + \frac{p - pq^{2n}}{1 - q} \\ &= q^n + p \frac{1 - q^{2n}}{p} = 1 \end{aligned}$$

On aurait pu faire en remarquant que $\{A_i\}_{0 \leq i \leq 2n}$ constitue un système complet d'événements, de sorte que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{2n} A_i$$

t comme tous ces événements sont mutuellement incompatibles, il vient

$$1 = p(\Omega) = \sum_{i=0}^{2n} P(A_i)$$

3. Pour $j \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$, on introduit l'événement $B_j =$ « pour la première fois, on obtient deux résultats identiques aux lancers $j-1$ et j ».

a.

$$\begin{aligned} B_2 &= (P_1 \cap P_2) \cup (\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) \\ B_3 &= (P_1 \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3) \\ B_4 &= (P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4) \cup (\overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3} \cap \overline{P_4}) \end{aligned}$$

- b. Pour $j \geq 1$, on a (il faut alterner les piles et faces avant d'obtenir à la fin 2 fois le même résultat)

$$\begin{aligned} B_{2j} &= \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} (P_{2k-1} \cap \overline{P_{2k}}) \cap P_{2j-1} \cap P_{2j} \right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} (\overline{P_{2k-1}} \cap P_{2k}) \cap \overline{P_{2j-1}} \cap \overline{P_{2j}} \right) \\ B_{2j+1} &= \left(\bigcap_{k=1}^j (P_{2k-1} \cap \overline{P_{2k}}) \cap \overline{P_{2j+1}} \right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^j (\overline{P_{2k-1}} \cap P_{2k}) \cap P_{2j+1} \right) \end{aligned}$$

- c. Pour $1 \leq j$, en utilisant que la probabilité d'une réunion d'événements mutuellement incompatibles est égale à la somme de leur probabilité et que les lancers sont indépendants, on obtient que

$$\begin{aligned} P(B_{2j}) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{j-1} (P_{2k-1} \cap \overline{P_{2k}}) \cap P_{2j-1} \cap P_{2j}\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^{j-1} (\overline{P_{2k-1}} \cap P_{2k}) \cap \overline{P_{2j-1}} \cap \overline{P_{2j}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{j-1} (P(P_{2k-1}) \times P(\overline{P_{2k}})) \times P(P_{2j-1}) \times P(P_{2j}) + \prod_{k=1}^{j-1} (P(\overline{P_{2k-1}}) \times P(P_{2k})) \times P(\overline{P_{2j-1}}) \times P(\overline{P_{2j}}) \\ &= \prod_{k=1}^{j-1} (pq) \times p^2 + \prod_{k=1}^{j-1} (pq) \times q^2 = (p^2 + q^2)(pq)^{j-1} \\ P(B_{2j+1}) &= P\left(\bigcap_{k=1}^j (P_{2k-1} \cap \overline{P_{2k}}) \cap \overline{P_{2j+1}}\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^j (\overline{P_{2k-1}} \cap P_{2k}) \cap P_{2j+1}\right) \\ &= \prod_{k=1}^j (P(P_{2k-1}) \times P(\overline{P_{2k}})) \times P(\overline{P_{2j+1}}) + \prod_{k=1}^j (P(\overline{P_{2k-1}}) \times P(P_{2k})) \times P(P_{2j+1}) \\ &= \prod_{k=1}^j (P(P_{2k-1}) \times P(\overline{P_{2k}})) \times P(\overline{P_{2j+1}}) + \prod_{k=1}^j (P(\overline{P_{2k-1}}) \times P(P_{2k})) \times P(P_{2j+1}) \\ &= \prod_{k=1}^j (pq) \times q + \prod_{k=1}^j (pq) \times p = (p + q)(pq)^j = (p + q)^j \end{aligned}$$

Exo V. Mlle X souhaite ranger, côte à côte, 6 livres sur une étagère :

- $B_1 =$ « Le club des cinq et le trésor de l'île » de Enyd Blyton;
- $B_2 =$ « Le club des cinq en vacances » de Enyd Blyton;
- $R_1 =$ « Harry Potter à l'école des sorciers » de J. K. Rowling;

- R_2 = « Harry Potter et la chambre des secrets » de J. K. Rowling;
- S_1 = « Les malheurs de Sophie » de la Comtesse de Ségur;
- S_2 = « Les vacances » de la Comtesse de Ségur.

1. Il y a autant de dispositions possibles que de 6 listes sans répétitions (arrangements) choisis parmi 6 éléments (ou de permutations de 6 éléments), c'est à dire

$$A_6^6 = 6! = 720$$

2. On permute d'abord les autrices, puis pour chaque autrice, on décide lequel de ses deux livres est placé en premier. Le nombre de dispositions possibles est donc

$$3! \times \binom{2}{1}^3 = 6 \times 8 = 48$$

3. Il y a deux livres avec le mot « vacances » dans le titre (B_2 et S_2). On commence par choisir la position la plus à gauche de ces deux livres (5 choix possible, la place la plus à droite n'étant pas disponible), on choisit lequel des deux sera le plus à gauche, puis on place l'autre à sa droite. Enfin, on place les autres livres en les faisant permutter sur 4 places qui restent

Le nombre de dispositions possibles est donc

$$\binom{5}{1} \times \binom{2}{1} \times 4! = 5 \times 2 \times 24 = 240$$

4. On choisit l'un des deux livres avec « vacances » pour le mettre à l'extrémité gauche, on met l'autre à l'extrémité droite puis on fait permutter les autres livres sur les 4 places qui restent. Le nombre de dispositions possibles est donc

$$\binom{2}{1} \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

5. On choisit 3 livres parmi les 6 possibles, il y a $\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$ possibilités.
6. On prend S_1 = « Les malheurs de Sophie », puis on peut compléter avec S_2 et un livre parmi les 4 restant (4 possibilités) ou alors on choisit une autre autrice (2 possibilités) et on prend ses deux livres. Le nombre de possibilités est donc

$$\binom{4}{1} + \binom{2}{1} = 4 + 2 = 6$$