DEVOIR SURVEILLE 3

Exo I. **(Ecricome)** On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$

1. a. Déterminer le domaine de définition D de f.
   b. Etudier la continuité de f sur D. f se prolonge t'elle par continuité en 0 ? Interpréter graphiquement.
   c. Etudier la dérivabilité de f sur D. Interpréter graphiquement.
   d. Dresser le tableau de variations complet de f
   e. Tracer la courbe représentative de f
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $]0,e^2]$ sur un intervalle à déterminer. Dresser le tableau de variations de f^{-1}.
   b. Etudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$
   c. Déterminer alors f^{-1}.
3. a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique a sur D et vérifier que $a \in [1,\mathrm{e}]$.
   b. Pour $1 \leqslant x \leqslant e$, montrer que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   a. Montrer que la suite u est bien définie et que $u_n \in [1,\mathrm{e}]$ pour $n \geqslant 0$.
   b. Montrer que $|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$ pour $n \geqslant 0$.
   c. En déduire que $|u_n - a| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ pour $n \geqslant 0$. Qu'en déduit-on ?
   d. Ecrire une fonction **Scilab** qui renvoie $f(x)$ pour un nombre x (de D).
   e. Ecrire un script **Scilab** qui donne une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
5. Pour $n \geqslant 1$, on considère l'équation définie sur D par

$$(En): \qquad f(x) = \frac{x}{n}$$

   et on introduit la fonction g_n définie par $g_n(x) = f(x) - \frac{x}{n}$
   a. Pour $n \geqslant 1$, montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur D que l'on notera x_n. Que vaut x_1 ?
   b. Déterminer le signe de $g_{n+1}(x) - g_n(x)$ pour $x \in D$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$.
   c. Justifier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$, puis montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n} = 0$$

   En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$.

Exo II. Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indistingables. On appelle « épreuve » la séquence suivante : on tire une boule de l'urne, puis

- si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne
- si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession de $N \geqslant 1$ épreuves.
Pour $1 \leqslant n \leqslant N$, on définit les événements :

- $Z_n =$« à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, il ne reste aucune boule rouge dans l'urne »
- $U_n =$« à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, il reste une seule boule rouge dans l'urne »
- $D_n =$« à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, il reste deux boules rouges dans l'urne »
- $R_n =$« lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve on a tiré une boule rouge de l'urne »
- $B_n =$« lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve on a tiré une boule bleue de l'urne »

1. Calculer les probabilités des événements Z_1, U_1 et D_1.
2. Pour $1 \leqslant n \leqslant N$, calculer la probabilité de D_n *en justifiant de manière détaillée.*
3. Calculer la probabilité qu'il reste à l'issue de **chacune** des quatre premières épreuves une seule boule rouge dans l'urne.
4. Pour $1 \leqslant n \leqslant N$, on note u_n la probabilité de U_n
   a. Calculer u_2
   b. Montrer que Z_n, U_n et D_n forment un système complet d'événements
   c. Pour $1 \leqslant n \leqslant N$, montrer que
   $$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$$
   On considère la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie par
   $$w_1 = u_1 \qquad w_{n+1} = \frac{2}{3}w_n + \frac{2}{3^{n+1}} \qquad (n \geqslant 1)$$
   et l'on pourra utiliser que $u_n = w_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$
   d. On pose $v_n = w_n + \frac{2}{3^n}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique et en déduire une expression de w_n en fonction de $n \geqslant 1$.
   e. Déduire de ce qui précède la probabilité de Z_n pour $1 \leqslant n \leqslant N$.
5. En utilisant la relation de récurrence de la question 4c, écrire un script **Scilab** qui demande un entier n (strictement positif) et qui affiche la valeur de u_n.

Exo III. On pose $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ tq $f'(x) + f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. Montrer que la fonction définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ appartient à F.
3. Prouver que $F = \mathrm{Vect}(g)$. *Etant donnée une fonction f appartenent à F, on pourra dériver l'application définie par $h(x) = f(x)\mathrm{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$*

Exo IV. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On considère les vecteurs :

$$u = (1,3,-1,0) \qquad v = (5,4,-2,1) \quad \text{et} \quad w = (-13,5,1,-4)$$

1. Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y + 7t = x + y + 4z - 2t = 0\}$
   Montrer que H est un espace vectoriel et en déterminer une base.
2. Soit $F = \text{Vect}(u,v,w)$.
   a. Montrer que la famille (u,v,w) est liée
   b. En déduire une base de F
   c. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.
   d. Déterminer une base de $F \cap H$.

Exo V. On dispose de deux boîtes U et V :

- U contient 3 boules blanches et 2 boules noires
- V contient 2 boules blanches et 3 boules noires.

On effectue un nombre fini de tirages **avec remise**, la première boule étant tirée de U, selon la règle suivante :

- Si un tirage donne une boule blanche, le tirage suivant est effectué dans U
- Si un tirage donne une boule noire, le tirage suivant est effectué dans V

On définit les événements suivants, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

- $B_n =$« le n$^{\text{ième}}$ tirage donne une boule blanche »
- $N_n =$« le n$^{\text{ième}}$ tirage donne une boule noire »

On pose $p_n = P(B_n)$ et $q_n = P(N_n)$ les probabilités des événements B_n et N_n .

1. Donner les valeurs de p_1 et q_1
2. Calculer, en justifiant clairement, p_2 et q_2
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_{B_n}(B_{n+1}$, $P_{N_n}(B_{n+1}$, $P_{B_n}(N_{n+1})$ et $P_{N_n}(N_{n+1})$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n et q_n.
5. Que vaut $p_n + q_n$?
6. En déduire une expression de p_{n+1} en fonction de p_n
7. En déduire une expression de p_n et q_n en fonctioin de n
8. Etudier la convergence de (p_n) et (q_n) et préciser, le cas échéant, leur limite.
9. Déterminer la probabilité que l'on ne tire que des boules blanches lors des n premiers tirages.