

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 3

Exo I. 1. a. Nous remarquons que

$$x \in D \iff \begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln(x) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ 2 \geq \ln(x) \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e^2 \end{cases} \iff 0 < x \leq e^2$$

En particulier $D =]0, e^2]$

- b. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc sur D .
A fortiori, l'application $x \mapsto 2 - \ln(x)$ est continue sur D et à valeurs positives (d'après l'étude menée en 1).

Comme la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, la composée f est continue sur D . Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \ln(x)) = +\infty,$$

par composition des limites, nous remarquons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et par conséquent que la fonction f ne peut être prolongée par continuité en 0. De plus, la courbe de f présente une asymptote verticale d'équation $X = 0$.

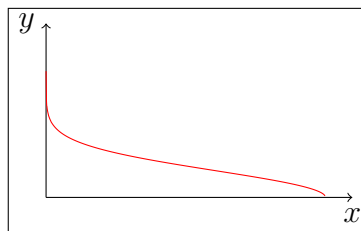
- c. L'application $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donc sur $]0, e^2[$. A fortiori, l'application $x \mapsto 2 - \ln(x)$ est dérivable sur $]0, e^2[$ et à valeurs strictement positives car $2 - \ln(x) > 0 \iff x < e^2$.

Comme l'application $u \mapsto \sqrt{u}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, la composée f est dérivable sur $]0, e^2[$. Nous obtenons par ailleurs que

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{2 - \ln(x)}} \quad (0 < x < e^2)$$

En particulier, nous observons que $\lim_{\substack{x \rightarrow e^2 \\ x < e^2}} f'(x) = -\infty$, ce qui induit que la courbe de f présente une tangente verticale en $x = e^2$

- d. (galère à dactylographier : je le décris). f est strictement décroissante sur $]0, e^2[$ car sa dérivée est strictement négative sur ce domaine. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(e^2) = \sqrt{0} = 0$. On a aussi $f(1) = \sqrt{2}$ (valeur optionnelle, facile à calculer), ce qui servira en 2b.



e.

2. a. f est continue et strictement décroissante sur D (elle l'est sur $]0, e^2[$ à cause de sa dérivée mais aussi sur $]0, e^2]$ par passage à la limite, car elle est continue en e^2), donc, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $]0, e^2]$ dans $f(]0, e^2]) = [0, +\infty[$. Je décris le tableau de variations de f^{-1} . Comme f^{-1} a le même sens de variation que f , elle est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus comme $f(0^+) = +\infty$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0^+$ et comme $f(e^2) = 0$, on a $f^{-1}(0) = e^2$.

- b. La bijection réciproque f^{-1} est dérivable en tout point $y = f(x)$ pour lequel la dérivée $f'(x)$ existe et est non nulle. Comme la dérivée de f est définie et non nulle pour $0 < x < e^2$, nous concluons que f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, comme $f(1) = \sqrt{2}$ et $f'(1) = -\frac{1}{1} \times \frac{1}{2\sqrt{2-\ln(1)}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, il vient $f^{-1}(\sqrt{2}) = 1$ et

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\sqrt{2}))} = \frac{1}{f'(1)} = -2\sqrt{2}$$

- c. En fait, on aurait pu étudier directement f^{-1} par le procédé (équation résoluble) suivant

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \sqrt{2 - \ln(x)} \iff y^2 = 2 - \ln(x) \iff \ln(x) = 2 - y^2 \\ &\iff x = e^{2-y^2} \end{aligned}$$

De sorte que $f^{-1}(y) = e^{2-y^2}$ pour $0 < y \leq e$. On remarque que les questions 2a et 2b deviennent triviales si l'on utilise cette formule (d'où l'intérêt de traiter 2c avant 2b)

3. a. *par contre l'équation $f(x) = x$ n'étant pas soluble, il faut passer par le tableau de variation* L'application $h(x) = f(x) - x$ est trivialement continue sur $]0, e^2]$ et dérivable sur $]0, e^2[$ (d'après 1b et 1c). De plus $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ (car $f'(x) < 0$). De sorte que h est strictement décroissante sur $]0, e^2]$. Or $h(0^+) = +\infty$ et $h(e^2) = 0 - e^2 < 0$. Comme f est continue sur $]0, e^2]$, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires ($[-e^2, +\infty[= [h(e^2), h(0^+)[\subset h(]0, e^2])$), qu'il existe une solution $x \in D$ de l'équation $h(x) = 0 \iff f(x) = x$. Et comme h est strictement monotone, cette solution est unique. Comme $h(e) = \sqrt{2 - \ln(e)} - e = \sqrt{1} - e < 0$ et $h(1) = f(1) - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$, par le même raisonnement, nous obtenons de plus que $x \in]1, e[$.
- b. Pour $1 \leq x \leq e$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| -\frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{2-\ln(x)}} \right| \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{2-\ln(x)}} \\ &\leq \frac{1}{1} \times \frac{1}{2\sqrt{2-\ln(1)}} \\ &\leq \frac{1}{2} \quad (1 \leq x \leq e) \end{aligned}$$

4. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.
- a. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \quad u_n \text{ EST DÉFINI ET } u_n \in [1, e]$$

- P_0 est vraie car $u_0 = 1 \in [1, e]$
- Supposons P_n pour un entier $n \geq 0$ et montrons P_{n+1} . Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, comme u_n est défini et appartient à $[1, e]$ (d'après P_n), nous déduisons de la décroissance de f sur $[1, e] \subset D$ que u_{n+1} est défini et satisfait

$$1 = \sqrt{1} = f(e) \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq f(1) = \sqrt{2} \leq e$$

A fortiori, P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

- b. Soit $n \geq 0$. Comme $a \in [1, e]$ et $b = u_n \in [1, e]$, En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f , qui est continue et dérivable sur $[1, e]$ et qui vérifie $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad (1 \leq x \leq e)$, nous obtenons que

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$$

Comme $b = u_n$ et $f(b) = f(u_n) = u_{n+1}$, il vient

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a| \quad (n \geq 0)$$

- c. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition

$$P_n : \quad |u_n - a| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

- P_0 est vraie car $|u_0 - a| = |1 - a| \leq 2$ car $a \in [1, e]$ de sorte que $0 \leq a - 1 \leq e - 1 \leq 2$
- Supposons P_n pour un entier $n \geq 0$ et montrons P_{n+1} . Nous déduisons du résultat de la question précédente et de P_n que

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{(n+1)-1}}$$

De sorte que P_{n+1} est vraie

En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, il résulte du principe des gendarmes que $\lim(u_n - a) = 0$ puis que $\lim u_n = a$.

- d.

```
function [r] = f(x)
    r = sqrt(2-log(x))
endfunction
```

- e.

```
u=1
n=0
while 1/2^(n-1)>0.001
    u = sqrt(2-log(u)) // ou u = f(u)
    // pour exploiter la fonction du 4d
    n = n + 1
end
disp (u, "valeur approchée à 0.001 près de a par u_n = ")
disp(n, "obtenue pour n = ")
```

5. Pour $n \geq 1$, on considère l'équation définie sur D par

$$(En) : \quad f(x) = \frac{x}{n}$$

et on introduit la fonction g_n définie par $g_n(x) = f(x) - \frac{x}{n}$

- a. Soit $n \geq 1$. La fonction g_n est continue sur D et dérivable sur $]0, e^2[$ et vérifie $g'_n(x) = f'(x) - \frac{1}{n} < 0$ (mêmes raisons : $f'(x) < 0$). Comme $g_n(0^+) = f(0^+) = +\infty$ et $g_n(e^2) = f(e^2) - \frac{e^2}{n} = -\frac{e^2}{n} < 0$, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires et de la stricte monotonie de g sur D , qu'il existe une unique solution de l'équation $g_n(x) = 0 \iff f(x) = \frac{x}{n}$ sur D . x_1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$, autrement dit $x_1 = a$ (puisque $n = 1$ pour x_1)
- b. Pour $x \in D$, nous remarquons que

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = f(x) - \frac{x}{n+1} - \left(f(x) - \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x}{n+1} = \frac{x}{n(n+1)}$$

En particulier, $g_{n+1}(x) - g_n(x)$ est strictement positif sur $D =]0, e^2]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous déduisons alors de cette inégalité pour $x = x_n$ et de l'égalité $g_n(x_n) = 0$ que

$$g_{n+1}(x_n) = g_{n+1}(x_n) - g_n(x_n) > 0$$

Or la fonction g_{n+1} est strictement décroissante et satisfait $g_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. A fortiori, nous avons nécessairement $x_n < x_{n+1}$ (le contraire est absurde). En particulier, la suite (x_n) est strictement croissante.

- c. Comme la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et majorée par e^2 (car $x_n \in D$), c'est une suite convergente, qui converge vers une limite finie $\ell \in]0, e^2] = D$. A fortiori, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 0$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation $f(x_n) - \frac{x_n}{n} = g_n(x_n) = 0$, nous déduisons alors de la continuité de f sur D que

$$f(\ell) = f(\ell) - 0 = 0$$

Comme e^2 est l'unique solution de l'équation $f(\ell) = 0$, nous en déduisons alors que $\ell = e^2$, c'est à dire que

$$\lim x_n = e^2$$

- Exo II.** 1. Comme les probabilités de tirer une boule sont les mêmes, on va utiliser la probabilité uniforme et le dénombrement pour répondre à cette question, de sorte que (pour la première épreuve, $\Omega = \{\text{bleu1}, \text{rouge1}, \text{rouge2}\}$)

$$P(Z_1) = 0 \quad P(U_1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(D_1) = \frac{1}{3}$$

2. Pour $1 \leq n \leq N$, on a $D_n = \cap_{k=1}^n B_k$. Il résulte alors du théorème des probabilités composées que

$$\begin{aligned} P(D_n) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P_{D_{n-1}}(B_n) \\ &= \underbrace{\frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{3}}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

On peut également dire que cela revient à tirer n fois (avec remise) une bleue parmi une urne de trois boules avec une seule bleue, avec des tirages indépendants

3. Le plus dur est de **bien** comprendre ce qui est demandé, c'est à dire la probabilité de $R_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) &= P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) \times P_{R_1 \cap B_2}(B_3) \times P_{R_1 \cap B_2 \cap B_3}(B_4) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} \end{aligned}$$

Pour avoir une seule boule à l'issue de chacune des 4 premières épreuves, il faut commencer par tirer une rouge (ce qui, en introduisant une bleue supplémentaire et modifie les probabilités), puis ne plus tirer que des rouges

4. a. Nous remarquons que $U_2 = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$. Comme les deux intersections sont incompatibles, il suit

$$u_2 = P(U_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2)$$

Il résulte alors de la formule de conditionnement que

$$\begin{aligned} u_2 &= P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) \\ u_2 &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- b. Z_n , U_n et D_n forment un système complet d'événements car, à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage, on a

- soit 0 boule rouges dans l'urne (Z_n)
- soit 1 boule rouge dans l'urne (U_n)
- soit 2 boules rouges dans l'urne (D_n)

Autrement dit $\Omega = Z_n \cup U_n \cup D_n$ et ces événements sont mutuellement incompatibles ($Z_n \cap U_n = \emptyset$, $Z_n \cap D_n = \emptyset$ et $D_n \cap U_n = \emptyset$)

- c. Pour $1 \leq n \leq N$, il résulte du résultat de la question 2 et de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement de la question précédente que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(U_{n+1}) \\ &= P(Z_n) \times P_{Z_n}(U_{n+1}) + P(U_n) \times P_{U_n}(U_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(U_{n+1}) \\ &= P(Z_n) \times 0 + u_n \times \frac{2}{3} + P(D_n) \times \frac{2}{3} \\ &= u_n \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

On considère la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$w_1 = u_1 \quad w_{n+1} = \frac{2}{3}w_n + \frac{2}{3^{n+1}} \quad (n \geq 1)$$

et l'on pourra utiliser que $u_n = w_n$ pour $1 \leq n \leq N$

- d. Soit $n \geq 1$. Alors, nous remarquons que

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= w_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3}w_n + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3}w_n + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(w_n + \frac{2}{3^n} \right) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

A fortiori, la suite v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Nous en déduisons que

$$v_n = v_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(u_1 + \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (n \geq 1)$$

De sorte que

$$w_n = v_n - \frac{2}{3^n} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} \quad (n \geq 1)$$

Comme $u_n = w_n$ pour $1 \leq n \leq N$, il vient

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} \quad (1 \leq n \leq N)$$

e. Comme (Z_n, U_n, D_n) forme un système complet d'événement, on a

$$1 = P(\Omega) = P(Z_n \cup U_n \cup D_n) = P(Z_n) + P(U_n) + P(D_n) \quad (1 \leq n \leq N)$$

Il résulte alors des résultats des questions 2 et 4d que

$$\begin{aligned} P(Z_n) &= 1 - \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 1 + \frac{1}{3^n} - \frac{2^{n+1}}{3^n} \quad (1 \leq n \leq N) \end{aligned}$$

5.

```
n = input("Entrez un entier n : ")
u = 2/3 // u(1)
for k = 2:n
    u = 2*u/3 + 2/3^k    // u(k) = 2 * u(k-1)/3 + 2/3^k
end
disp(u, "u(n) = ")
```

Exo III. 1. Montrons que F est un $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Par définition, $F \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de référence
- la fonction nulle $f : x \mapsto 0$ est trivialement dans F
- F est stable par combinaisons linéaires, car pour $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $(f, g) \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui est stable par combinaisons linéaires (puisque c'est un espace vectoriel), de sorte que $\lambda f + \mu g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de multiples de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (f et g le sont car elles appartiennent à F). Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)'(x) + (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda f'(x) + \mu g'(x) + \lambda f(x) + \mu g(x) \\ &= \lambda \underbrace{(f'(x) + f(x))}_{=0} + \mu \underbrace{(g'(x) + g(x))}_{=0} \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0 \end{aligned}$$

De sorte que $\lambda f + \mu g \in F$ (les 3 contraintes pour être dans F sont vérifiées).
CQFD

2. La fonction définie par $g(x) = e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et de plus

$$g'(x) + g(x) = -e^{-x} + e^{-x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

A fortiori, $g \in F$.

3. Comme $g \in F$, on a trivialement $\text{Vect}(g) \subset F$ (car F est stable par combinaisons linéaires, étant un espace vectoriel). Prouvons maintenant l'inclusion $F \subset \text{Vect}(g)$. Soit $f \in F$, montrons que $f \in \text{Vect}(g)$, c'est à dire qu'il existe un nombre réel λ permettant d'écrire que $f = \lambda g$, autrement dit que

$$f(x) = \lambda g(x) = \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

La fonction $h(x) = f(x)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et nous remarquons que

$$h'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x = \underbrace{(f'(x) + f(x))}_{=0} e^x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La fonction h étant de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, c'est une fonction constante. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda = h(x) = f(x)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

En multipliant par e^{-x} , il vient alors que $f(x) = \lambda e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. CQFD
Comme $\text{Vect}(g) \subset F$ et $F \subset \text{Vect}(g)$, nous avons bien montré que $F = \text{Vect}(g)$.

Exo IV. On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On considère les vecteurs :

$$u = (1, 3, -1, 0) \quad v = (5, 4, -2, 1) \quad \text{et} \quad w = (-13, 5, 1, -4)$$

1. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} & 3x - y + 7t = x + y + 4z - 2t = 0 \\ \iff & \begin{cases} 3x & \boxed{-y} & & +7t & = 0 \\ x & +y & \boxed{+4z} & -2t & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 3x & \boxed{-y} & & +7t & = 0 \\ 4x & & \boxed{+4z} & +5t & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y & = 3x + 7t \\ z & = -x - \frac{5}{4}t \end{cases} \end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in H & \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z, t) = (a, 3a + 7b, -a - \frac{5}{4}b, b) \\ & \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z, t) = a(1, 3, -1, 0) + b(0, 7, -\frac{5}{4}, 1) \\ & \iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}((1, 3, -1, 0), (0, 7, -\frac{5}{4}, 1)) \end{aligned}$$

En particulier, posant $k = (0, 7, -\frac{5}{4}, 1)$, on a $H = \text{Vect}(u, k)$ de sorte que H est un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, admettant (u, k) comm famille génératrice.

Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (multiples l'un de l'autre), ils forment une famille libre, de sorte que (u,v) est une base de H

2. Soit $F = \text{Vect}(u,v,w)$.

a. La famille (u,v,w) est liée car

$$-7u + 4v + w = (-7, -21, +7, 0) + (7, 21, -7, 0) = 0$$

b. Comme $w = 7u - 4v$, on a

$$F = \text{Vect}(u,v,w) = \text{Vect}(u,v)$$

Donc, (u,v) est une famille génératrice de F mais comme ces deux vecteurs sont non-linéaires, ils forment également une famille libre de sorte que (u,v) est une base de F

c. Procédons à une élimination.

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in F &\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z,t) = au + bv \\ &\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x &= a + 5b \\ y &= 3a + 4b \\ z &= -a - 2b \\ t &= \boxed{b} \end{cases} \\ &\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x - 5t &= a \\ y - 4t &= 3a \\ z + 2t &= \boxed{-a} \\ t &= \boxed{b} \end{cases} \\ &\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x - 5t + (z + 2t) &= 0 \\ y - 4t + 3(z + 2t) &= 0 \\ z + 2t &= \boxed{-a} \\ t &= \boxed{b} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 5t + (z + 2t) &= 0 \\ y - 4t + 3(z + 2t) &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x3t + z = 0 = y + 2t + 3z\}$$

d. *utilisons un paramétrage et une équation cartésienne...contrairement à ce que semble suggérer le sujet : prendre 2 equations cartésiennes ?* Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \cap H &\iff (x,y,z,t) \in F \text{ et } (x,y,z,t) \in H \\
&\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = a + 5b \\ y = 3a + 4b \\ z = -a - 2b \\ t = \boxed{b} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 3x - y + 7t = 0 \\ x + y + 4z - 2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = a + 5b \\ y = 3a + 4b \\ z = -a - 2b \\ t = \boxed{b} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 3(a + 5b) - (3a + 4b) + 7b = 0 \\ a + 5b + 3a + 4b + 4(-a - 2b) - 2b = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = a + 5b \\ y = 3a + 4b \\ z = -a - 2b \\ t = \boxed{b} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 18b = 0 \\ -b = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = a + 5b \\ y = 3a + 4b \\ z = -a - 2b \\ t = \boxed{b} \end{cases} \text{ et } b = 0 \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = a \\ y = 3a \\ z = -a \\ t = 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) \in \text{Vect}(u)
\end{aligned}$$

Bon, la erm... je ne l'ai peut être pas rédigé de manière optimale (mais comme je peux copier-coller et ne pas trop souffrir, je peux me permettre) En particulier $F \cap H = \text{Vect}(u)$. Comme u est un vecteur non nul, il forme une famille libre (et génératrice de $F \cap H$). A fortiori, u est une base de $F \cap H$.

- Exo V.**
- On a $p_1 = P(B_1) = \frac{3}{5}$ et $q_1 = P(N_1) = \frac{2}{5}$.
 - En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements (B_1, N_1) , il vient

$$\begin{aligned}
p_2 &= P(B_2) \\
&= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) \\
&= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \\
&= \frac{13}{25} \\
q_2 &= P(N_2) = P(\overline{B_2}) = 1 - P(B_2) = 1 - p_2 \\
&= \frac{12}{25}
\end{aligned}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
P_{B_n}(B_{n+1}) &= \frac{3}{5} && \text{(tirage d'une blanche dans l'urne } U) \\
P_{B_n}(N_{n+1}) &= \frac{2}{5} && \text{(tirage d'une noire dans l'urne } U) \\
P_{N_n}(B_{n+1}) &= \frac{2}{5} && \text{(tirage d'une blanche dans l'urne } V) \\
P_{N_n}(N_{n+1}) &= \frac{3}{5} && \text{(tirage d'une noire dans l'urne } V)
\end{aligned}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il résulte de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (B_n, N_n) que

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\
&= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(N_n) \times P_{N_n}(B_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{3}{5} + q_n \times \frac{2}{5} \\
q_{n+1} &= P(N_{n+1}) \\
&= P(B_n) \times P_{B_n}(N_{n+1}) + P(N_n) \times P_{N_n}(N_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{2}{5} + q_n \times \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Sous forme matricielle, cela donne

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

De sorte que l'on aurait, en posant $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

5. On a déjà utilisé précédemment que $p_n + q_n = 1$ car (B_n, N_n) est un système complet d'événements.
6. Comme $q_n = 1 - p_n$, il résulte des relations précédentes que

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{3}{5} + q_n \times \frac{2}{5} = p_n \times \frac{3}{5} + (1 - p_n) \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}p_n \quad (n \geq 1)$$

En particulier, (p_n) est une suite arithmético-géométrique

7. Comme $c = \frac{2}{5} + \frac{c}{5} \iff c = \frac{1}{2}$, on obtient (comme d'hab) que $(p_n - c)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $p_1 - c = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$, de sorte que

$$p_n - c = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} (p_1 - c) = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{2 \times 5^n} \quad (n \geq 1)$$

A fortiori, pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
p_n &= c + \frac{1}{2 \times 5^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 5^n} \\
q_n &= 1 - p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 5^n}
\end{aligned}$$

8. D'après les formules obtenues précédemment, les suites (p_n) et (q_n) convergent et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \frac{1}{2}$$

9. La probabilité que l'on ne tire que des boules blanches lors des n premiers tirages est

$$P(\cap_{k=1}^n B_k) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P_{gnagnagna}(B_n) = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Pour la calculer, cela revient à tirer n blanches (avec remise) dans une urne contenant 3 blanches et 2 noires, dont les tirages sont indépendants