DEVOIR SURVEILLE 4

Exo I. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$p(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

1. a. Prouver que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
   b. Déterminer la matrice P de p dans la base canonique $\mathcal{B}c$ de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée)
   c. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ker}(p)$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Im}(p)$.
   d. Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$
   e. Montrer que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$
   f. Déterminer $p \circ p$.
2. a. Justifier Montrer qu'il existe un unique endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} s(1,0,0) & = \frac{1}{3}(1,2,-2) \\ s(0,1,0) & = \frac{1}{3}(2,1,2) \\ s(0,0,1) & = \frac{1}{3}(-2,2,1) \end{cases}$$

   b. Etablir que $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ puis que $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   c. Prouver que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer s^{-1}
   d. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base $\mathcal{C}'$ de $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   e. Les endomorphismes s et p commuttent ils ? (Justifier)

Exo II. **SCILAB**

1. En utilisant des opérations pointées la matrice $M = 1 : 10$, comment peut-on obtenir en une ligne le résultat $\left(\frac{2k}{k+1}\right)_{1 \leqslant k \leqslant 10}$?
2. Ecrire une fonction simulant une variable aléatoire X de loi binomiale $B(10, \frac{1}{2})$
3. On aimerait effectuer 2000 simulations de X et obtenir le rang Y d'obtention du premier 6. Quel programme pourrait on écrire pour y arriver ?
4. Comment pourrait on faire pour simuler le rang d'obtention du troisième 6 (on peut admettre que l'on obtiendrait au moins trois six en 2000 simulations) ?
5. Que vaut M après l'execution du programme suivant ?

```
M = zeros(6,6)
M(1:6,1)=1
for i = 0:5
        M(i+1, 2:i+1) = M(i, 1:i) + M(i, 2:i+1)
end
```

Exo III. Dans cet exercice, on considère des fonctions F, G, H et L définies pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t, \qquad H(x) = F(x^2) \quad \text{et} \quad L(x) = G(x)^2$$

1. a. Calculer $F(0)$

   b. Pour $x \geqslant 0$, montrer que $0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x}$.

2. a. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   b. En déduire que L est dérivable sur $\mathbb{R}$ et justifier que

$$L'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. a. Pour $u \in \mathbb{R}$, établir que $e^{-u} - 1 + u \geqslant 0$.

   b. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que

$$F(x+h) - F(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad (-1 < h < 1)$$

   c. Pour $h > 0$ fixé, dresser le tableau de variation de la fonction φ_h définie par

$$\varphi_h(t) = \mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2) \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$$

   On admet que le tableau de variation obtenu pour une fonction φ_h avec $h > 0$ reste valable pour toute fonction φ_h avec $h \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

   d. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et $h \in]-1,1[$, montrer que l'on a

$$0 \leqslant F(x+h) - F(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t \leqslant \left(\mathrm{e}^{-2h} - 1 + 2h\right) \times F(x)$$

4. a. Montrer que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u} = 1$. *On pourra ensuite utiliser que* $\mathrm{e}^u = 1 + u\alpha(u)$ *avec* $\lim\limits_{u\to 0}\alpha(u) = 1$. En déduire la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-2h} - 1 + 2h}{h}$

   b. A l'aide de 3d, déterminer $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

   c. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. A l'aide de ce qui précède, déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$.
   Ceci permet de dire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

5. a. A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\mathrm{d}u \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   b. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $H'(x) = -L'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

6. a. Justifier l'existence d'une constante γ dont on précisera la valeur telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad L(x) = \gamma - H(x)$$

   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} H(x)$

   c. A l'aide de ce qui précède, montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} G(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exo IV. **Edhec E** On lance indéfiniment une pièce donnant « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0{,}1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : « on obtient Pile (resp. Face) au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Donner la loi de X_2.
2. a. Donner la loi de X_3.

   b. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   a. Que vaut $X_n(\Omega)$?

   b. Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n

   c. En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que

$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right)$$

   d. En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q.

   e. Grace aux questions précédentes, démontrer que

$$P(X_4 = 1) = P(X_4 = 2) = 2pq(1 - pq)$$

   et préciser la loi de X_4. Calculer $E(X_4)$.

   f. Pour $k \in [\![2,n]\!]$, on note Z_k la variable qui vaut 1 si le $k^{\text{ième}}$ lancer est un changement et 0 sinon, de sorte que Z_k est une variable de Bernouilli. Ecrire X_n à l'aide des variables Z_k et en déduire $E(X_n)$.
4. Dans cette question, on suppose que $p = q = \frac{1}{2}$.

   a. Vérifier, en utilisant les résultats précédents, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.

   b. Soit $n \geqslant 2$ fixé.

      i. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Justifier que

$$\begin{aligned} P((X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) &= \tfrac{1}{2}P\big((X_n = k) \cap P_n\big) \\ P((X_n = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) &= \tfrac{1}{2}P\big((X_n = k) \cap F_n\big) \end{aligned}$$

      et en déduire que

$$P\big((X_n = k-1) \cap (X_{n+1} = k)\big) = \frac{1}{2}P(X_n = k-1)$$

      ii. Démontrer par récurrence que la variable X_n suit la loi $B(n-1, \frac{1}{2})$.