CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 4

Exo I. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$p(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

1. a. Prouver que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
   - $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace Vectoriel de référence (même espace au départ et à l'arrivée)
   - p est une application car, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $2x+y-z \in \mathbb{R}$, $x+2y+z \in \mathbb{R}$ et $-x+y+2z \in \mathbb{R}$ de sorte que $p(x,y,z)$ est défini et appartient à $\mathbb{R}^3$
   - p est linéaire car, pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $X' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} p(\lambda X + \mu Y) &= p(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= \tfrac{1}{3}\left(2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \right. \\ &= \tfrac{\lambda}{3}\left(2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)\right) + \tfrac{\mu}{3}\left(2x' + y' - z', x' + 2y' + z', -x\right. \\ &= \lambda p(X) + \mu p(X') \end{aligned}$$

   En conclusion, $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

   b. Comme on a

$$\begin{aligned} p(1,0,0) &= \tfrac{1}{3}(2,1,-1) \\ p(0,1,0) &= \tfrac{1}{3}(1,2,1) \\ p(0,0,1) &= \tfrac{1}{3}(-1,1,2) \end{aligned}$$

   on obtient que

$$P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_c}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   c. Nous remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(P) &= \mathrm{rg}\left(\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_1' \leftarrow C_1 - 2C_2 \\ C_3' \leftarrow C_3 + C_2 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C_3'' \leftarrow C_3' + C_1' \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

   Ce calcul de rang, nous permet de voir (via le théorème du rang) que $\dim Im(p) = 2$, $\dim \ker(f) = 1$ *et aussi d'intuiter la relation*

$$0 = C_3" = C_3' - C_1' = (C_3 + C_2) + (C_1 - 2C_2) = C_1 - C_2 + C_3$$

Nous allons utiliser ces infos précieuses pour faire une belle démo simple et efficace par « parachutage + vérification » (TM Binda) En remarquant que

$$p(1,-1,1) = \frac{1}{3}(2-1-1,1-2+1,-1-1+2) = 0,$$

nous obtenons que $(1,-1,1) \in \mathrm{Ker}(p)$. En particulier

$$\mathrm{Vect}(1,-1,1) \subset \mathrm{Ker}(p)$$

De plus, comme la linéarité de p induit que

$$0 = p(1,-1,1) = p(1,0,0) - p(0,1,0) + p(0,0,1)$$

nous déduisons de cette relation de dépendance linéaire entre images que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(p) &= \mathrm{Vect}\left(p(1,0,0), p(0,1,0), p(0,0,1)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(p(1,0,0), p(0,1,0)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(3p(1,0,0), 3p(0,1,0)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left((2,1,-1),(1,2,1)\right) \end{aligned}$$

En particulier, la famille $\mathcal{C} = ((2,1,-1),(1,2,1))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(p)$ et comme elle est libre, en tant que famille de 2 Vecteurs non-colinéaires, c'est une base de $\mathrm{Im}(p)$. *Il ne nous reste plus qu'à établir que*

$$Ker(p) \subset Vect(1,-1,1)$$

mais, pour faire une démonstration simple, belle et efficace, nous avons besoin de la dimension et du théorème du rang (adapté à notre usage anticipé du premier semestre) Comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ comporte $n = 3$ éléments et comme $r = rg(P) = 2$, nous avons admis que Si F est une famille libre d'un seul Vecteur ($\ell = n - r = 1$) de $\mathrm{Ker}(p)$, alors F est une base de $\ker(p)$ Comme $McB = \big((1,-1,1)\big)$ est une famille libre (un Vecteur non nul forme une famille libre) de $\mathrm{Ker}(p)$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et on a donc

$$\ker(p) = \mathrm{Vect}(1,-1,1)$$

Voila une démo simple (et très détaillée pour la pédagogie), qui sera utilisée systèmatiquement quasiment à l'identique au second semestre

d. Posons $g = p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et montrons que $\mathrm{Im}(p) = ker(g)$. Determinons le noyau de g. Comme

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= p(x,y,z) - Id_{\mathbb{R}^3}(x,y,z) \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+y-z, x+2y+z, -x+y+2z) - (x,y,z) \\ &= \tfrac{1}{3}(-x+y-z, x-y+z, -x+y-z) \end{aligned}$$

De sorte que

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker(g) &\iff g(x,y,z)=0\\
&\iff (-x+y-z,x-y+z,-x+y-z)=0\\
&\iff x-y+z=0\\
&\iff x=y-z\\
&\iff (x,y,z)=(y-z,y,z)=y(1,1,0)+z(-1,0,1)\\
&\iff (x,y,z)\in \operatorname{Vect}\big((1,1,0),(-1,0,1)\big)
\end{aligned}
$$

De sorte que

$$\ker(p-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\ker(g)=\operatorname{Vect}\big((1,1,0),(-1,0,1)\big)=\operatorname{Vect}\left((2,1,-1),(1,2,1)\right)=\mathfrak{I}(p)$$

L'égalité entre les deux espace Vectoriels engendrés au centre découlant des relations

$$\begin{cases}(2,1,-1) &= (1,1,0)-(-1,0,1)\\ (1,2,1) &= 2(1,1,0)+(-1,0,1)\end{cases}$$

qui induisent que $\operatorname{Vect}\left((2,1,-1),(1,2,1)\right)\subset \operatorname{Vect}\big((1,1,0)$ et des égalités

$$\begin{cases}(1,1,0) &= \frac{1}{3}(2,1,-1)+\frac{1}{3}(1,2,1)\\ (-1,0,1) &= \frac{-2}{3}(2,1,-1)+\frac{1}{3}(1,2,1)\end{cases}$$

qui induisent que $\operatorname{Vect}\big((1,1,0),(-1,0,1)\big)\subset \operatorname{Vect}\left((2,1,-1),(1,2,1)\right)$ *On peut aussi passer par les matrices ou par la théorie (cette question redémontre une propriété du cours sur les projecteurs, que l'on verra au second semestre*

e. *des points gratuits.* Nous remarquons que $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}=((1,-1,1),(2,1,-1),(1,2,1))$ est une famille de trois Vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Or le calcul du rang de cette famille montre que

$$\operatorname{rg}\big((1,-1,1),(2,1,-1),(1,2,1)\big)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&3\\0&-3&0\end{pmatrix}=3$$

de sorte que cette famille est libre (même rang que le nombre de Vecteurs) et génératrice de $\mathbb{R}^3$ (même rang que le nombre de Vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. A fortiori, c'est une base de $\mathbb{R}^3$

f. Pour déterminer $p\circ p$, il est équivalent de déterminer P^2. *pensez à utiliser les matrices !* Or, nous remarquons que

$$
\begin{aligned}
P^2 &= \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}^2=\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}4+1+1&2+2-1&-2+1-2\\2+2-1&1+4+1&-1+2+2\\-2+1-2&-1+2+2&1+1+4\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}2\times3&3&-3\\3&2\times3&3\\-3&3&2\times3\end{pmatrix}=P
\end{aligned}
$$

A fortiori, nous obtenons que $p\circ p=p$. *Ceci est une propriété classique des projecteurs, comme on le verra au second semestre*

2.

a. Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Comme la famille (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (c'est sa base canonique). Etant données des Vecteurs quelconques v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$, il existe une unique application linéaire s : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} s(e_1) & = v_1 \\ s(e_2) & = v_2 \\ s(e_3) & = v_3 \end{cases}$$

C'est un théorème du cours, cf le poly Pour $v_1 = \frac{1}{3}(1,2,-2)$, $v_2 = \frac{1}{3}(2,1,2)$ et $v_3 = \frac{1}{3}(-2,2,1)$, nous obtenons alors le résultat attendu. *Si on ne connait pas son cours, on peut aussi procéder de la façon suivante (qui redémontre le cours) : Par Analyse/synthèses, on trouve par linéarité la formule de*

$$s(x,y,z) = x.s(1,0,0) + y.s(0,1,0) + z.s(0,0,1) \qquad (x,y,z)$$

Puis, on peut montrer que la formule obtenue pour $s(x,y,z)$ donne un endomorphisme (existence). Pour l'unicité, il suffit de calculer la matrice de s (forcément unique), ce que l'on va faire la maintenant car c'est utile pour la suite

((D'après le cours, Justifier Montrer qu'il existe un unique endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} s(1,0,0) & = \frac{1}{3}(1,2,-2) \\ s(0,1,0) & = \frac{1}{3}(2,1,2) \\ s(0,0,1) & = \frac{1}{3}(-2,2,1) \end{cases}$$

b. Des identités précédentes, nous déduisons la matrice S de s dans la base canonique. ainsi, nous avons

$$S = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}c}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, nous déduisons l'égalité $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ de la relation matricielle

$$S = 2 \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2P - I_3$$

Comme l'endomorphisme p commutte avec $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, il résulte des identités remarquables (ou du binôme de Newton) et de l'égalité $p^2 = p$ que

$$s^2 = s \circ s = (2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 4p^2 - 4p \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$$

c. Comme $s \circ s = s^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, l'endomorphisme s est bijectif (c'est donc un automorphisme) et sa bijection réciproque est s, autrement dit $s^{-1} = s$. *On peut voir cela, via les matrices : $S^2 = I_3$ donc S est inversible et $S^{-1} = S$*

d. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base $\mathcal{C}'$ de $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

e. Les endomorphismes s et p commuttent car

$$s \circ p = (2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ p = 2p^2 - p = p \circ (2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = p \circ s$$

Exo II. SCILAB

1.

```
2*M./(M+1)
```

2. Bon, pour la correction, je simule une loi B(n,p) au lieu de $B(10,1/2)$.

```
function [X] = b(n, p)
   X = sum(rand(1, n) < p)
endfunction
```

3. Pour une solution sans limitation du nombre de simulation (loi géométrique)

```
Y = 1
while b(10,1/2) ~= 6
  Y = Y + 1
end
```

Pour réponde à la question posée plus simplement

```
S = grand(1,2000, "bin", 10, 1/2)
R = find(S==6)
Y = min(R)
```

ou sans utiliser grand

```
S = zeros(1,2000)
for a = 1:2000
  S(1,a) = b(10,1/2)
end
R = find(S==6)
Y = min(R)
```

J'aurais du demander une simulation de X suivant une loi de bernouilli, pour pouvoir utiliser rand au lieu de grand

4. il suffit de faire $Z = R(3)$.
5. M est la matrice des 6 premieres lignes du triangle de pascal (de $n = 0$ à $n = 5$), on obtient :

```
1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0
1 2 1 0 0 0
1 3 3 1 0 0
1 4 6 4 1 0
1 5 10 10 5 1
```

Exo III. Dans cet exercice, on considère des fonctions F, G, H et L définies pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t, \qquad H(x) = F(x^2) \quad \text{et} \quad L(x) = G(x)^2$$

1. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ de sorte que F est bien défini en x. *je prends mes précautions* Nous remarquons que

$$F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-0(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$$

Car il est bien connu que $\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et que $\tan(0) = 0 \iff \mathrm{Arctan}(0) = 0$ et $tan(\frac{\pi}{4} = 1 \iff \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.

b. Pour $x \geqslant 0$, nous déduisons de la croissance de l'exponentielle et de l'inégalité $-x(1+t^2) \leqslant -x$ que

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

En intégrant sur le segment $[0,1]$ il découle alors de la croissance de l'intégrale que

$$0 = \int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2} = \mathrm{e}^{-x}F(0) = \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x}$$

2. a. Comme l'application $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$, la fonction G est l'unique primitive, s'annulant en 0, de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (autrment dit dérivable, de dérivée continue). Afortiori, nous avons

$$G'(x) = g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

.

b. Comme $L = G \times G$, l'application L est un produit de fonctions dérivables (ou $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable (ou $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$L'(x) = \left(G(x)^2\right)' = 2G'(x) \times G(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}G(x) = 2\hat{\mathrm{e}}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R})$$

En déduire que L est dérivable sur $\mathbb{R}$ et justifier que

3. a. L'application $k : u \mapsto e^{-u} - 1 + u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$k'(u) = -\mathrm{e}^{-u} + 1 \qquad (u \in \mathbb{R})$$

En particulier, $k'(u)$ est nulle en $u = 0$, strictement négative si $u < 0$ et strictement positive si $u > 0$. Donc k est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $k(0) = \mathrm{e}^0 - 1 + 0 = 0$, nous obtenons qlors que $e^{-u} - 1 + u = k(u) \geqslant k(0) = 0$ pour $u \in \mathbb{R}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $-1 < h < 1$, nous remarquons que

$$
\begin{aligned}
& F(x+h)-F(x)+h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t \\
= & \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t+h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t \\
= & \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2}-\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}+h\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\right)\mathrm{d}t \\
= & \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left(\mathrm{e}^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Comme $\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\geqslant 0$ et comme $\mathrm{e}^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)\geqslant 0$ d'après le résultat de la question 3a appliqué à $u=h(1+t^2)$, pour $0\leqslant x\leqslant 1$, il résulte de la positivité de l'intégrale que

$$F(x+h)-F(x)+h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t\geqslant 0 \qquad (-1<h<1)$$

c. Pour $h>0$ fixé, On remarque que $\varphi_h(t)=k(h(1+t^2))$ ou k est la fonction introduite en 3a. *on va reexploiter ce qu'on a trouvé* De sorte que la fonction φ_h est dérivable, en tant que composée de fonctions dérivables, sur $[-1,1]$ et

$$\varphi_h'(t)=t\times\underbrace{2h\times k'(h(1+t^2))}_{\geqslant 0} \qquad (-1\leqslant t\leqslant 1)$$

En particulier $\varphi_h'(t)$ est du signe de t. En particulier, φ_h est décroissante sur $[-1,0]$ et croissante sur $[0,1]$. Par ailleurs, on a

$$\varphi_h(-1)=e^{-2h}-1+2h=\varphi_h(1) \quad \text{et} \quad \varphi_h(0)=\mathrm{e}^{-h}-1+h$$

Je ne dessine pas le tableau de variation mais ses infos sont données

d. Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé et $h\in]-1,1[$, on a montré précédemment que

$$
\begin{aligned}
F(x+h)-F(x)+h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left(\mathrm{e}^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\varphi_h(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Comme il resulte du tableau de variation précédent et du résultat de la question 3a pour $u=h$ que

$$0\leqslant e^{-h}-1+h=\varphi_h(0)\leqslant\varphi_h(t)\leqslant\varphi_h(1)=e^{-2h}-1+2h \qquad (-1\leqslant t\leqslant 1)$$

Nous remarquons que

$$0\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\varphi_h(t)\leqslant\left(e^{-2h}-1+2h\right)\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

Et, nous intégrons cette inégalité sur le segment $[0,1]$ pour déduire de la croissance de l'intégrale que

$$0 = \int_0^1 0\mathrm{d}t \leqslant F(x+h) - F(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t \quad \leqslant \int_0^1 \Big(e^{-2h} - 1 + 2h\Big)\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \Big(\mathrm{e}^{-2h} - 1 + 2h\Big) \times F(x)$$

4. a. La fonction exponentielle étant dérivable en 0, nous savons que

$$1 = \mathrm{e}^0 = \exp'(0) = \lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}$$

En particulier, nous déduisons de la relation $\mathrm{e}^u = 1+u\alpha(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\alpha(u) = 1$ que

$$\frac{\mathrm{e}^{-2h} - 1 + 2h}{h} = \frac{1 - 2h\alpha(-2h) - 1 + 2h}{h} = 2 - 2\alpha(-2h) \qquad (h \neq 0)$$

A fortiori, en faisant tendre h vers 0, il vient

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-2h} - 1 + 2h}{h} = 2 - 2 = 0$$

b. En divisant 3d par $h > 0$, nous obtenons que

$$0 \leqslant \frac{F(x+h) - F(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t}{h} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2h} - 1 + 2h}{h} \times F(x \qquad (h > 0)$$

Comme le menbre de gauche et de droite convergent vers 0 d'après la question 4a, lorsque h tends vers 0^+, il résulte du principe des gendarmes que

$$0 = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)$$

Et par suite que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -int_0^1\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

c. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. En recommançant ce qui a été fait précédemment avec $h < 0$ (celachange juste le sens des inégalités mais on peut encore appliquer le principe des gendarmes), il vient

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -int_0^1\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

De sorte que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -int_0^1\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

En particulier, la fonction F est dérivable en x et vérifie

$$F'(x) = -int_0^1\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t = -int_0^1\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R})$$

5.

a. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On procède au changement de variable $t = xu$. Comme $u \mapsto xu$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,x]$ et comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,x]$, on obtient que

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{x}{x}} \mathrm{e}^{-(xu)^2} x\mathrm{d}u = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\mathrm{d}u$$

Par ailleurs, lorsque $x = 0$, on a également l'égalité

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\mathrm{d}u$$

De sorte qu'elle est vraie pour $x \in \mathbb{R}$.

b. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de l'application $x \mapsto x^2$ (polynôme), dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et de l'application F qui st dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, il résulte des résultat de la question 1 et de la question 4c que

$$H'(x) = 2x \times F'(x^2) = 2x\left(-\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Il résulte alors du résultat de la question 5a que

$$H'(x) = -2e^{-x^2} \times x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t = -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Et nous reconnaissons alors la dérivée de la fonction L trouvée en 2b, de sorte que $H'(x) = -L'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

6. a. Comme H et $-L$ sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction H', d'après la relation précédante, il existence une unique constante γ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad L(x) = \gamma - H(x)$$

t pour $x = 0$, il vient $L(0) = G(0)^2 = 0 = \gamma - H(0) = \gamma - F(0) = \gamma - \frac{\pi}{4}$ de sorte que $\gamma = \frac{\pi}{4}$. En conclusion, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad L(x) = \frac{\pi}{4} - H(x)$$

b. Pour $x \geqslant 0$, nous avons $H(x) = F(x^2)$ et il résulte de l'inégalité établie en 1b que

$$0 \leqslant F(x^2) = H(x) \leqslant \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x^2}$$

Comme les membres de gauche et de droite tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il résulte alors du principe des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$

c. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité obtenue au 6a, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} L(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - H(x)\right) = \frac{\pi}{4}$$

En particulier, comme $G(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, et comme $G(x) = \sqrt{L(x)}$ pour $x \geqslant 0$, nous obtenons que

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{L(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$