EXERCICE 4

On lance n fois, de façon indépendante, une pièce donnant pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. On dit qu'un lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du précédent lancer. On note X_n le nombre de changements durant les n premiers lancers. On note P_k l'événement « on obtient pile au k-ème lancer » et F_k l'événement « on obtient face au k-ème lancer ».

1. a) *Donner la loi de X_2.*

Lorsqu'on effectue seulement deux tirages, on ne peut avoir au plus qu'un seul changement, donc $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$. La variable X_2 suit donc une loi de Bernoulli avec

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(P_1F_2 \cup F_1P_2) \\ &= P(P_1F_2) + P(F_1P_2) \qquad \text{par incompatibilité} \\ &= P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) \qquad \text{par indépendance} \\ &= pq + qp. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(2pq).}$$

b) *Donner la loi de X_3 et calculer son espérance et sa variance.*

Cette fois, lorsqu'on effectue trois tirages, on obtient au plus deux changements, donc $X_3(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. En utilisant l'incompatibilité et l'indépendance, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_3=0) &= P(F_1F_2F_3) + P(P_1P_2P_3) \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(P_1)P(P_2)P(P_3) \\ &= q^3 + p^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_3=1) &= P(F_1P_2P_3) + P(P_1P_2F_3) + P(P_1F_2F_3) + P(F_1F_2P_3) \\ &= P(F_1)P(P_2)P(P_3) + P(P_1)P(P_2)P(F_3) \\ &\quad + P(P_1)P(F_2)P(F_3) + P(F_1)P(F_2)P(P_3) \\ &= 2pq^2 + 2p^2q \\ &= 2pq \qquad \text{car } p+q=1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_3=2) &= P(F_1P_2F_3) + P(P_1F_2P_3) \\ &= P(F_1)P(P_2)P(F_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3) \\ &= pq^2 + p^2q \\ &= pq \qquad \text{car } p+q=1, \end{aligned}$$

donc

i	0	1	2
$P(X_3=i)$	q^3+p^3	$2pq$	pq

Par suite, on a

$$E(X_3) = 0 \times (q^3+p^3) + 1 \times 2pq + 2 \times pq = 4pq$$

et

$$E({X_3}^2) = 0^2 \times (q^3+p^3) + 1^2 \times 2pq + 2^2 \times pq = 6pq$$

donc

$$V(X_3) = E({X_3}^2) - E(X_3)^2 = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3-8pq).$$

Ainsi,

$$\boxed{E(X_3) = 4pq \qquad \text{et} \qquad V(X_3) = 2pq(3-8pq).}$$

2. *Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.*

a) $\alpha]$ *Que vaut $X_n(\Omega)$?*

Lorsqu'on effectue n tirages, on obtient entre 0 et $n-1$ changements donc

$$\boxed{X_n(\Omega) = [\![0; n-1]\!].}$$

$\beta]$ *Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.*

On a

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P(P_1P_2\cdots P_n \cup F_1F_2\cdots F_n) \\ &= P(P_1P_2\cdots P_n) + P(F_1F_2\cdots F_n) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(P_1)P(P_2)\cdots P(P_n) + P(F_1)P(F_2)\cdots P(F_n) \quad \text{par indépendance} \\ &= p^n + q^n, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X_n = 0) = p^n + q^n.}$$

$\gamma]$ *En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que $P(X_n = 1) = 2pq(q^{n-1} - p^{n-1})/(q-p)$.*

On a

$$(X_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{n-1}(P_1\cdots P_kF_{k+1}\cdots F_n) \ \cup \ \bigcup_{k=1}^{n-1}(F_1\cdots F_kP_{k+1}\cdots P_n)$$

et cette réunion est composée d'événements clairement incompatibles. Donc

$$\begin{aligned} P(X_n = 1) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(P_1\cdots P_kF_{k+1}\cdots F_n) \ + \ \sum_{k=1}^{n-1} P(F_1\cdots F_kP_{k+1}\cdots P_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P(P_1)\cdots P(P_k)P(F_{k+1})\cdots P(F_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} P(F_1)\cdots P(F_k)P(P_{k+1})\cdots P(P_n) \qquad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^kq^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} q^kp^{n-k} \\ &= q^n\frac{(p/q)^n - p/q}{p/q - 1} + p^n\frac{(q/p)^n - p/q}{q/p - 1} \qquad \text{sommes de suites géométriques} \\ &= \frac{p^nq - pq^n}{p-q} + \frac{pq^n - p^nq}{q-p} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X_n = 1) = 2pq\frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q-p}.}$$

$\delta]$ *Exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q selon la parité de n.*

Si n est pair, on a

$$(X_n = n-1) = P_1F_2P_3F_4\cdots F_{n-2}P_{n-1}F_n \ \cup \ F_1P_2F_3P_4\cdots P_{n-2}F_{n-1}P_n,$$

donc, par incompatibilité,

$$\begin{aligned} P(X_n = 1) &= P(P_1F_2P_3F_4\cdots F_{n-2}P_{n-1}F_n) + P(F_1P_2F_3P_4\cdots P_{n-2}F_{n-1}P_n) \\ &= P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4)\cdots P(F_{n-2})P(P_{n-1})P(F_n) \\ &\quad + P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4)\cdots P(P_{n-2})P(F_{n-1})P(P_n) \\ &= 2p^{n/2}q^{n/2}. \end{aligned}$$

Si n est impair, on a

$$(X_n = n-1) = P_1F_2P_3F_4\cdots P_{n-2}F_{n-1}P_n \ \cup \ F_1P_2F_3P_4\cdots F_{n-2}P_{n-1}F_n,$$

donc, par incompatibilité,

$$\begin{aligned}
P(X_n = 1) &= P(F_1P_2F_3P_4\cdots P_{n-2}F_{n-1}P_n) + P(F_1P_2F_3P_4\cdots F_{n-2}P_{n-1}F_n) \\
&= P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4)\cdots P(P_{n-2})P(F_{n-1})P(P_n) \\
&\quad + P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4)\cdots P(F_{n-2})P(P_{n-1})P(F_n) \\
&= p^{(n+1)/2}q^{(n-1)/2} + p^{(n-1)/2}q^{(n+1)/2} \\
&= p^{(n-1)/2}q^{(n-1)/2} \qquad \text{car } p+q=1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{P(X_n = n-1) = \begin{cases} 2p^{n/2}q^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ p^{(n-1)/2}q^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}}$$

ε] *Grâce aux questions précédentes, montrer que $P(X_4 = 1) = P(X_4 = 2) = pq(1-pq)$ et préciser la loi de X_4. Calculer $E(X_4)$.*

Pour $n = 4$, les questions précédentes nous disent que

$$P(X_4 = 0) = p^4 + q^4,$$

$$P(X_4 = 1) = 2pq\frac{q^3-p^3}{q-p} = 2pq(q^2+qp+p^2) = 2pq^3 + 2p^2q^2 + 2p^3q$$

et

$$P(X_4 = 3) = 2p^{4/2}q^{4/2} = 2p^2q^2.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
P(X_4 = 2) &= 1 - P(X_4 = 0) - P(X_4 = 1) - P(X_4 = 3) \\
&= 1 - (p^4 + q^4 + 2pq^3 + 4p^2q^2 + 2p^3q) \\
&= 1 - \big((p+q)^4 - 2p^3q - 2p^2q^2 - 2pq^3\big) \\
&= 2pq^3 + 2p^2q^2 + 2p^3q.
\end{aligned}$$

Or

$$pq^3 + p^2q^2 + p^3q = pq(q^2+pq+p^2) = pq\big((p+q)^2 - pq\big) = pq(1-pq),$$

donc

$$P(X_4 = 1) = P(X_4 = 2) = 2pq(1-pq).$$

En définitive,

i	0	1	2	3
$P(X_4 = i)$	p^4+q^4	$2pq(1-pq)$	$2pq(1-pq)$	$2p^2q^2$

Par suite, on a

$$E(X_4) = 0\times(p^4+q^4) + 1\times 2pq(1-pq) + 2\times 2pq(1-pq) + 3\times 2p^2q^2 = 6pq,$$

donc

$$\boxed{E(X_4) = 6pq.}$$

b) *Pour $k \in [\![2;n]\!]$, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ème lancer est un changement et 0 sinon, de sorte que Z_k est une variable de Bernoulli. Écrire X_n à l'aide des variables Z_k et en déduire $E(X_n)$.*

On a clairement

$$X_n = Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n.$$

Or, pour tout $k \geqslant 2$, Z_k est une variable de Bernoulli avec

$$P(Z_k = 1) = P(P_{k-1}F_k \cup F_{k-1}P_k) = P(P_{k-1})P(F_k) + P(F_{k-1})P(P_k) = 2pq,$$

où l'on a successivement utilisé l'incompatibilité et l'indépendance. Ainsi, le paramètre de la loi de Bernoulli vaut $2pq$, ce qui nous dit que

$$\forall k \in [\![2;n]\!], \qquad E(Z_k) = 2pq.$$

Par suite, on a

$$\begin{array}{rcll} E(X_n) & = & E(Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n) & \\ & = & E(X_2) + \cdots + E(X_n) & \text{par linéarité de } E \\ & = & (n-1) \times 2pq, & \end{array}$$

donc

$$\boxed{E(X_n) = 2(n-1)pq.}$$

3. *Dans cette question, on suppose que $p = q = 1/2$.*

a) *Vérifier que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.*

Dans le cas où $p = q = 1/2$, les résultats des questions précédentes nous disent que

i	0	1	2
$P(X_3 = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

et

i	0	1	2	3
$P(X_4 = i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

donc

$$\boxed{X_3 \hookrightarrow \mathscr{B}\Big(2; \frac{1}{2}\Big) \qquad \text{et} \qquad X_4 \hookrightarrow \mathscr{B}\Big(3; \frac{1}{2}\Big).}$$

b) *Soit $n \geqslant 2$.*

α] *Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Justifier que $P\big((X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = P\big((X_n = k) \cap P_n\big)/2$ et $P\big((X_n = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\big) = P\big((X_n = k) \cap F_n\big)/2$ et en déduire que l'on a $P\big((X_n = k) \cap (X_{n+1} = k)\big) = P(X_n = k)/2$. On admettra que l'on démontrerait de même que $P\big((X_n = k-1) \cap (X_{n+1} = k)\big) = P(X_n = k-1)/2$.*

L'événement $(X_n = k) \cap P_n$ ne concerne que les n premiers tirages. Il est donc indépendant de P_{n+1}. Par suite, on a

$$P\big((X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = P\big((X_n = k) \cap P_n\big)P(P_{n+1}),$$

ce qui donne

$$\boxed{P\big((X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2}P\big((X_n = k) \cap P_n\big).}$$

De même, l'événement $(X_n = k) \cap F_n$ est indépendant de F_{n+1}, donc

$$P\big((X_n = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\big) = P\big((X_n = k) \cap F_n\big)P(F_{n+1}),$$

ce qui donne

$$\boxed{P\big((X_n = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\big) = \frac{1}{2}P\big((X_n = k) \cap F_n\big).}$$

Or $(X_n = k) \cap (X_{n+1} = k) \ = \ \big((X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \cup \big((X_n = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\big)$
et les événements de cette réunion sont incompatibles, donc

$$\begin{aligned}
& P\big((X_n = k) \cap (X_{n+1} = k)\big) \\
= \ & P\big((X_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) + P\big((X_n = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\big) \\
= \ & \frac{1}{2} P\big((X_n = k) \cap P_n\big) + \frac{1}{2} P\big((X_n = k) \cap F_n\big) \\
= \ & \frac{1}{2} P\big[\big((X_n = k) \cap P_n\big) \cup \big((X_n = k) \cap F_n\big)\big] \quad \text{par incompatibilité} \\
= \ & \frac{1}{2} P\big((X_n = k) \cap (P_n \cup F_n)\big).
\end{aligned}$$

Comme $P_n \cup F_n = \Omega$, on en conclut que

$$\boxed{P\big((X_n = k) \cap (X_{n+1} = k)\big) = \frac{1}{2} P\big((X_n = k).}$$

β] *Démontrer par récurrence que la variable X_n suit la loi $\mathscr{B}(n-1; 1/2)$.*
Pour tout $n \geqslant 2$, considérons la propriété $\mathscr{H}_n : X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1; 1/2)$.
<u>Initialisation :</u> Nous savons que $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$ donc $\mathscr{H}_2$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Fixons $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{H}_n$ est vraie et démontrons $\mathscr{H}_{n+1}$. On sait que $X_{n+1}(\Omega) = [\![0; n]\!]$. Pour $k = 0$, on sait que

$$P(X_{n+1} = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^n}\cdot$$

Pour $k \in [\![1; n]\!]$, la formule de filtration nous dit que

$$P(X_{n+1} = k) = P\big((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k)\big) + P\big((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k-1)\big).$$

D'après la question précédente, on sait que

$$P\big((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k)\big) = \frac{1}{2} P(X_n = k)$$

et

$$P\big((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k-1)\big) = \frac{1}{2} P(X_{n-1} = k)$$

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence implique que

$$P(X_n = k) = \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{et} \qquad P(X_n = k-1) = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}\cdot$$

En combinant ces résultats, on obtient

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = k) \ &= \ \frac{1}{2}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \ \left\{\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right\}\frac{1}{2^n} \\
&= \ \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \qquad \text{par la formule de Pascal.}
\end{aligned}$$

Pour résumer, on a donc

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad P(X_{n+1} = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}},$$

ce qui prouve que $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n; 1/2)$ et donc que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.
<u>Conclusion :</u> Le principe de récurrence nous dit alors que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\Big(n-1; \frac{1}{2}\Big)\cdot}$$

c) *En utilisant l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, justifier que* $P(3 \leqslant X_9 \leqslant 5) \geqslant 1/2$.

On sait que X_9 suit la loi $\mathscr{B}(8; 1/2)$ donc $E(X_9) = 4$ et $V(X_9) = 2$. L'inégalité de Bienaymé–Tchebychev implique alors que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$P(|X_9 - 4| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

En prenant $\varepsilon = 2$ et en remarquant que $(|X_9 - 4| \geqslant 2) = (X_9 \leqslant 2 \text{ ou } X_9 \geqslant 6)$, on obtient donc que

$$P(X_9 \leqslant 2 \text{ ou } X_9 \geqslant 6) \leqslant \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$1 - P(3 \leqslant X_9 \leqslant 5) \leqslant \frac{1}{2}$$

ou encore

$$\boxed{P(3 \leqslant X_9 \leqslant 5) \geqslant \frac{1}{2}.}$$