

DEVOIR SURVEILLE 6

Exo I. HEC E 2014. On définit huit formes linéaires de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en posant

$$\begin{aligned} s_1(A) &= a + b + c & s_2(A) &= d + e + f & s_3(A) &= g + h + i \\ s_4(A) &= a + d + g & s_5(A) &= b + e + h & s_6(A) &= c + f + i \\ s_7(A) &= a + e + i & s_8(A) &= c + e + g \end{aligned} \quad \text{pour } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , qui vaut 1.

Rappel : $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.
 - Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?
- Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A))$.
 - Montrer que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$.
 - Ecrire la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^8$.
- On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A)$$

- Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \text{Ker } f$.
- Soit J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que

$$\mathcal{G} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}(J)$$

- Quel est le rang de l'application f ?
- Déterminer la dimension de $\text{Ker } f$ ainsi qu'une base de $\text{Ker } f$.

Exo II. EDHEC 2018.

- Pour $k \geq 2$, établir que $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}$.
 - En sommant pour $2 \leq k \leq n$, en déduire la nature de la série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$.
- Soit $D =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in D \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que f est continue sur $] - \infty, 1[$.
 - Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- Montrer que f est dérivable sur D puis calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.
 - Etudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque $x \in] - \infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .

- c. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation
4. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir l'existence d'un unique nombre réel $u_n \in [0,1[$ tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .
- b. Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$
- c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier n_0 tel que

$$u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad (n \geq n_0).$$

- d. A l'aide de la question 1, en déduire que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{n \ln(1 - u_n)}$ diverge.
- e. En revenant à la définition de (u_n) , conclure que la série $\sum_{n=2}^{\infty} (1 - u_n)$ diverge.

Exo III. EM Lyon 2014 On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $E_1 = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

Partie I. Propriétés générales de T

1. Pour $f \in E$, établir que $T(f) \in E_1$ et que

$$T(f)'(x) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

2. Montrer que l'application $T : f \mapsto T(f)$ définit un endomorphisme de E
3. L'application T est-elle surjective ?
4. Montrer que si $f \in E$ est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
5. Soit $f \in E$ tel que $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que $T(f)(x)$ tends vers 0 lorsque x tends vers $+\infty$.
6. Pour l'application $s : t \mapsto \sin(\pi t)$ de E , calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif ?

Partie II. Premier exemple

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_a(t) = e^{at} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $T(f_a)(x)$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, établir que $T(f_a) = \varphi(a)f_a$ où φ désigne l'application définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$
Etudier selon a le signe de $e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
- Pour $\lambda \in [1, +\infty[$, en déduire qu'il existe $f \neq 0$ dans E tel que $T(f) = \lambda f$.

Partie III. Deuxième exemple

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $h(t) = \frac{1}{|t|+1}$

- Vérifier que $h \in E$ et calculer $T(h)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. A cet effet, on remarquera que h est paire et on distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $1 < x$.
- Etudier les variations de $T(h)$ et tracer l'allure de sa représentation graphique. On précisera les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1. On donne $\ln 2 = 0,69\dots$ et $\ln 3 = 1,10\dots$
- Est ce que la réciproque du résultat obtenue à la question I.5 est vraie ? C'est à dire, étant donné $f \in E$ tel que $T(f)(x)$ tends vers 0 en $+\infty$, est ce que $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ tends vers une limite finie en $+\infty$. ?

Exo IV. EML E 2018. On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

- On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.
 - Déterminer $X(\Omega)$ puis décrire les événements $(X = 0)$ et $(X = 1)$
 - Montrer que $P(X = n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - Écrire une fonction Scilab, réalisant l'expérience ci-dessus et simulant la variable aléatoire X , avec pour en-tête

```
function [x] = simule_X()
```

- On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne. On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue.
 - Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .
 - Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, déterminer la probabilité $P_{X=n}(U = k)$. (on pensera à distinguer deux cas).
 - Pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire que $P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$.
 - Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
 - Compléter le script suivant, afin de simuler la variable U :

```
x=simule X()
U=.....
disp(U)
```

3. Dans cette question, $p \in]0,1[$ et deux individus A et B s'affrontent :
- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile. On note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus
 - le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile. On note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus
 - Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B, sinon c'est le joueur B qui gagne

a. **Simulation informatique**

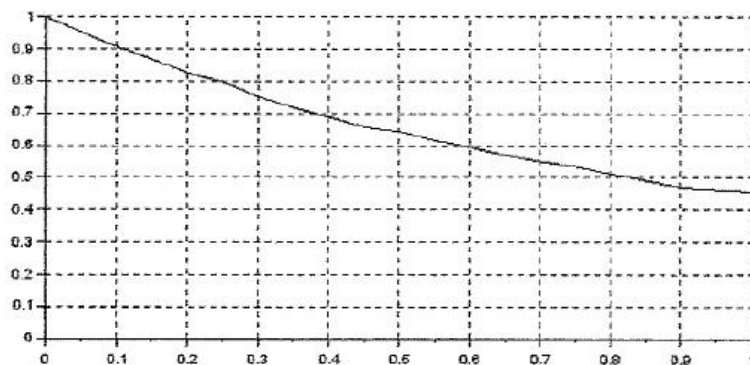
- i. Écrire une fonction Scilab prenant en argument un réel $p \in]0,1[$ et simulant la variable aléatoire Y d'en-tête

```
function y = simule_Y(p)
```

- ii. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function [r] = mystere(p)
    r = 0
    N = 10^4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
end
endfunction
```

- iii. On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

- b. Reconnaître la loi de Z , où Z est la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.
- c. En déduire que Y admet une espérance et une variance et préciser leurs valeurs.
- d. Montrer que $P(Y \geq n) = (1 - p)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- e. En déduire que $P(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}$
- f. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.