CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 6

Exo I. 1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.

a. Comme s_7 est une forme linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(s_7)$, par définition, $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Comme s_7 est une forme linéaire non nulle (car $s_7(I_3) = 3$, on a $\mathrm{Im}(s_7) = \mathbb{R}$. D'après le théorème du rang, appliqué à la forme linéaire s_7, on a alors

$$\dim(\mathcal{E}) = \dim \mathrm{Ker}(s_7) = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - \dim(s_7) = 9 - 1 = 8$$

2. Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A))$.

a.
- $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^8$ sont deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels
- Pour $A \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![1,8]\!]$, $s_i(A)$ est une somme de trois nombres réels, donc $s_i(A) \in \mathbb{R}$ de sorte que $f(A)$ est défini et appartient à $\mathbb{R}^8$. Donc f est une application
- Pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu B) &= (s_1(\lambda A + \mu B), \ldots, s_8(\lambda A + \mu B)) \\ &= (\lambda s_1(A) + \mu s_1(B), \ldots, \lambda s_8(A) + \mu s_8(B)) \\ &= \lambda(s_1(A), \ldots, s_8(A)) + \mu(s_1(B), \ldots, s_8(B)) \\ &= \lambda f(A) + \mu f(B) \end{aligned}$$

En conclusion, f est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$

b. Comme

$$\begin{aligned} f(E_{1,1}) &= (1,0,0,1,0,0,1,0) \\ f(E_{1,2}) &= (1,0,0,0,1,0,0,0) \\ f(E_{1,3}) &= (1,0,0,0,0,1,0,1) \\ f(E_{2,1}) &= (0,1,0,1,0,0,0,0) \\ f(E_{2,2}) &= (0,1,0,0,1,0,1,1) \\ f(E_{2,3}) &= (0,1,0,0,0,1,0,0) \\ f(E_{3,1}) &= (0,0,1,1,0,0,0,1) \\ f(E_{3,2}) &= (0,0,1,0,1,0,0,0) \\ f(E_{3,3}) &= (0,0,1,0,0,1,1,0) \end{aligned}$$

On a

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A)$$

a. Comme s_i est une forme linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et comme

$$s_i(A) = s_j(A) \iff (s_i - s_j)(A) = 0 \iff A \in \operatorname{Ker}(s_i - s_j)$$

nous remarquons que

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{G} &\iff s_i(A) = s_1(A) \qquad (2 \leqslant i \leqslant 8) \\ & A \in \operatorname{Ker}(s_i - s_1) \qquad (2 \leqslant i \leqslant 8) \\ & A \in \textstyle\bigcap_{i=2}^{8} \operatorname{Ker}(s_i - s_1) \end{aligned}$$

De sorte que $\mathcal{G} = \bigcap_{i=2}^{8} \operatorname{Ker}(s_i - s_1)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

b. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{E} &\iff A \in \mathcal{G} \text{ et } A \in \mathcal{E} \\ &\iff s_7(A) = 0 \text{ et } s_1(A) = \ldots = s_8(A) \\ &\iff s_i(A) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant 8)) \\ &\iff f(A) = 0 \\ &\iff A \in \operatorname{Ker}(f) \end{aligned}$$

De sorte que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \operatorname{Ker} f$.

c.
- Commençons par prouver que $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Vect}(J)$, c'est à dire que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Vect}(J) = \{0\}$ *(via la méthode diabolique)*
  Soit $A \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Vect}(J)$ et montrons que $A = 0$. Alors $A \in \operatorname{Ker}(f)$ et $A \in \operatorname{Vect}(J)$. De sorte que $f(A) = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda J$. Nous remarquons alors que

  $$0 = f(A) = f(\lambda J) = \lambda f(J) = \lambda(3{,}3{,}3{,}3{,}3{,}3{,}3{,}3)$$

  A fortiori, $\lambda = 0$ er nous concluons que $A = \lambda J = 0J = 0$.CQFD
- Montrons maintenant que $\mathcal{G} = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Vect}(J)$. Comme $\operatorname{Ker}(f) = \mathcal{G} \cap \mathcal{E}$ est inclus dans $\mathcal{G}$ (d'après I.3b) et comme $\operatorname{Vect}(J) \subset \mathcal{G}$ car $s_i(J) = 3$ pour $1 \leqslant i \leqslant 8$, nous remarquons que $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Vect}(J) \subset \mathcal{G}$ (c'est l'inclusion un peu plus facile).
  Il nous reste juste à montrer que $\mathcal{G} \subset \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Vect}(J)$. Soit $A \in \mathcal{G}$, montrons que $A \in \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Vect}(J)$, c'est à dire qu'il existe une matrice $B \in \operatorname{Ker}(f)$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A = B + \lambda J$.

  Recherche au brouillon : en mettant $A = B + \lambda J$ dans f, on obtient que $f(A) = \lambda f(J) = \lambda(3, \ldots, 3) = (s_1(A), \ldots s_1(A))$. Du coup, on réalise qu'il faut prendre $\lambda = s_1(A)/3$ et $B = A - \lambda J$

  Posons $\lambda = \frac{s_1(A)}{3}$ et $B = A - \lambda J$. Nous remarquons alors que $A = B + \lambda J$, que $\lambda J \in \operatorname{Vect}(J)$ et il ne nous reste plus qu'à montrer que $B \in \operatorname{Ker} f$. Or

  $$f(B) = f(A - \lambda J) = f(A) - \lambda f(J) = (s_1(A), \ldots, s_1(A)) - \frac{s_1(A)}{3} \times (3, \ldots, 3) = 0.$$

  De sorte que $B \in \operatorname{Ker} f$. CQFD

En conclusion, on a bien $\mathcal{G} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Vect}(J)$ *: Je n'ai pas tenté via laconcatenation des bases ou via les dimensions car je n'ai ni bases, ni dimensions.*

Donc il a fallu faire une démo théorique/difficile via les définitions et la méthode diabolique. Bon après, c'est un sujet HEC, hein...

d. *Wow, c'est bourrin !* En remarquant que $C_1+C_2+C_3 = C_4+C_5+C_6$ et en effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3-C_4-C_5-C_6$ dans le calcul de rang de la matrice obtenue au I2b, il vient

$$rg(f) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on procède au pivot $L_5 \leftarrow L_5 - L_1$ (qu'on rentabilise ensuite sur les colonnes) pour obtenir que

$$rg(f) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&-1&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ -1&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

En effectuant le pivot $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ (et en rentabilisant ensuite sur les colonnes), il vient

$$rg(f) = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&-1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ -1&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix} = 2+\text{rg}\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0\\ 1&0&-1&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

En effectuant le pivot $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ (et idem), il vient

$$rg(f) = 2+\text{rg}\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0\\ 1&0&-1&0&1&1\\ 0&0&-1&-1&1&0\\ 1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix} = 3+\text{rg}\begin{pmatrix} 1&-1&0&1&1\\ 0&-1&-1&1&0\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

En effectuant le pivot $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ (et idem+on peut virer une ligne et une colonne identiques), il vient

$$rg(f) = 3+\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4+\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4+\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effectuant le pivot $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ (et idem), il vient

$$rg(f) = 4 + \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 5 + \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 7$$

[censuré] de calcul

e. D'après le théorème du rang appliqué àf, on a

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - \operatorname{rg} f = 9 - 7 = 2$$

La question fun : il faut fabriquer descarrés magiques. Posant

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

nous remarquons que $f(B) = 0 = f(C)$ de sorte que $B \in \operatorname{Ker} f$ et $C \in \operatorname{Ker} f$. Comme ces deux matrices ne sont pas colinéaires, elles forment une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Ker} f$, qui est de dimension 2, donc, c'est une base de $\operatorname{Ker} f$. 10h04 *m'a pris trop de temps cet exercice, surtout les dernières questions :/ Ca commençait bien pourtant. J'aurais du passer à autre chose...ah mais mince, je peux pas, moi... :(*

Exo II. EDHEC.

1. a. Soit $k \geqslant 2$. Comme l'application $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{t \ln t} \leqslant \frac{1}{k \ln k} \qquad (k \leqslant t \leqslant k+1)$$

En intégrant cette inégalité entre k et $k+1$, il résulte de la croissance de l'integrale que

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k \ln k} = \frac{1}{k \ln k}$$

b. En sommant l'inégalité précédente pour $2 \leqslant k \leqslant n$, il découle de la relation de Chasles que

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

Comme $t \mapsto \ln(\ln(t))$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ sur $[2, +\infty[$, nous obtenons alors que

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = [\ln(\ln(t))]_2^{n+1} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

Comme le membre de gauche tends vers $+\infty$ lorsque n tends vers $+\infty$ nous en déduisons que la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ tends vers $+\infty$ et par conséquent que la série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverge.

2. Soit $D =]-\infty, 0[\cup]0{,}1[$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in D \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a. les applications $x \mapsto -x$, $x \mapsto (1-x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc sur D en tant que polynômes. Or l'application $u \mapsto \ln(u)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Comme $1 - x > 0$ pour $x < 1$, nous remarquons que la composée $x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty, 1[$ et ne s'annule pas sur D. A fortiori, le produit $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ est continu sur $]-\infty, 1[$, à valeurs non nulles sur D, de sorte que le quotient f, dont le dénominateur ne s'annule pas, est continu sur D Par ailleurs, en 0, un calcul de développement limité donne

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} = \frac{-x}{(1-x)(-x + o_0(x))} = \frac{-x}{-x + o_0(x)} = \frac{-1}{-1 + o_0(1)}$$

De sorte que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0)$. Autrement dit,$f$ est continue en 0. Comme f est conitnue sur D et en 0, elle est continue sur $]-\infty, 1[$.

b. Nous déduisons du calcul de développement limité précédent que

$$\begin{aligned} \tfrac{f(x)-f(0)}{x}) &= \tfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1 = \tfrac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)\ln(1-x)} \\ &= \tfrac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{-x+o_0(x)} \\ &= \tfrac{-x-(-x+o_0(x))}{-x+o_0(x)} \\ &= \tfrac{o_0(x)}{-x+o_0(x)} \\ &= \tfrac{o_0(1)}{-1+o_0(1)} \end{aligned}$$

En particulier, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ de sorte que f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$.

3. a. f est dérivable sur D, via le même raisonnement qu'en II2a, en remplaçant « continue » par « derivable ». Et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{-(1-x)\ln(1-x)-(-x)\left(-\ln(1-x)+(1-x)\frac{-1}{1-x}\right)}{((1-x)\ln(1-x))^2} \\ &= \tfrac{-(1-x)\ln(1-x)+x(-\ln(1-x)-1)}{((1-x)\ln(1-x))^2} \\ &= -\tfrac{\ln(1-x)+x}{((1-x)\ln(1-x))^2} \qquad (x \in D) \end{aligned}$$

b. Posons $g(x) = \ln(1-x) + x$.La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et

$$g'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x}$$

En particulier, $g'(0) = 0$, $g'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$ et $g'(x) > 0$ pour $x < 0$. Comme $g(0) = \ln(1-0) + 0 = 0$ et comme g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0,1[$, nous concluons que $g(x) = \ln(1-x) + x$ est strictement négatif sur D. En particulier, il résulte de la question précédente que f, qui est dérivable sur D et continue sur $]-\infty, 1[$, que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$.

c. En $-\infty$, $f(x) \sim \frac{-x}{-x\ln(1-x)} = \frac{1}{\ln(1-x)}$ de sorte que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. En $1-$, il résulte du théorème de croissance comparée que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = 0^-$ de sorte que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. Je ne dessine pas le TAB de VAR :p (10h42)

4. a. Comme f est continue sur et strictement croissante $[0,1[$, f est une bijection de $[0,1[$ dans $f([0,1[) = [0, +\infty[$ de sorte qu'il existe un unique nombe réel $u_n = f^{-1}(n) \in [0,1[$ tel que $f(u_n) = n$.
Pour $n = 1$, on a $u_1 = f^{-1}(1) = 0$ car $f(0) = 1$.

b. Comme f est une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[0, +\infty[$, nous déduisons de la relation $u_n = f^{-1}(n)$ que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 1$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned} f\left(1 - \tfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) &= \frac{-\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt{n}}\ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \\ &= \frac{-n\sqrt{n}+1}{\ln\left(n^{\frac{-3}{2}}\right)} \\ &= \frac{-n\sqrt{n}+1}{-\frac{3}{2}\ln n} \\ &= \frac{n\sqrt{n}-1}{\frac{3}{2}\ln n} \end{aligned}$$

Comme $n = o(\frac{n\sqrt{n}-1}{\frac{3}{2}\ln n})$, il existe un entier $n_0 \geqslant 0$ tel que

$$n \leqslant \frac{n\sqrt{n}-1}{\frac{3}{2}\ln n}) = f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (n \geqslant n_0)$$

Comme $u_n = f^{-1}(n)$ et comme l'application f^{-1} est croissante sur $[0, +\infty[$, nousobtenons alors que il existe un entier n_0 tel que

$$u_n \leqslant f^{-1} \circ f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad (n \geqslant n_0).$$

d. D'après la question précédente, nous avons

$$1 - u_n \geqslant 1 - \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad (n \geqslant n_0).$$

Comme la fonction logarithme est croissante, il vient

$$\ln(1-u_n) \geqslant \ln\frac{1}{n\sqrt{n}} = -\frac{3}{2}\ln n \qquad (n \geqslant n_0)$$

Et par suite (raisonner avec des nombres négatifs, ça ....)

$$-n\ln(1-u_n) \leqslant \frac{3}{2}n\ln n \qquad (n \geqslant n_0)$$

en passant à l'inverse (pour cesnombrespositifs (yeaaahh)), il vient

$$\frac{-1}{n\ln(1-u_n)} \geqslant \frac{2}{3}\frac{1}{n\ln n} \geqslant 0 \qquad (n \geqslant n_0)$$

Comme nous avons prouvé à la question 1 que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{n\ln(1-u_n)}$ diverge.

e. En remarquant que $f(u_n) = n$ et donc que

$$\frac{-u_n}{(1-u_n)\ln(1-u_n)} = n \qquad (n \geqslant 1)$$

nous déduisons de la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, que $u_n \sim 1$ puis que

$$(1-u_n) = \frac{-u_n}{n\ln(1-u_n)} \sim \frac{-1}{n\ln(1-u_n)}$$

Comme $1-u_n$ est strictement positif, nous remarquons que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(1-u_n)$ a la même nature que la série de la question précédente, qui diverge. En conclusion, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(1-u_n)$ diverge. 11h27

Exo III.

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Partie I.

1. Soit $f \in E$, alors l'application $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f, s'annulant en 0. Deplus, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. A fortiori, l'application $Tf(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{F(x+1)-F(x-1)}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (composées, différence et multiple). A fortiri $T(f) \in E_1$ et de plus

$$T(f)'(x) = \frac{1}{2}\left(F'(x+1)F'(x-1)\right) = \frac{f(x+1)-f(x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. - E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (le même au départ et à l'arrivée de T)
   - T est une application car, d'après le résultat de la question précédente,$\forall f \in E$, $T(f) \in E_1 \subset E$
   - Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et soient $(f,g) \in E^2$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{ll} T(\lambda f+\mu g)(x) & = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(\lambda f+\mu g)(t)\mathrm{d}t \\ & = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(\lambda f(t)+\mu g(t))\mathrm{d}t \\ & = \frac{\lambda}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t+\frac{\mu}{2}\int_{x-1}^{x+1} g(t)\mathrm{d}t \\ & = \lambda T(f)(x)+\mu T(g)(x) = (\lambda T(f)+\mu T(g))(x) \end{array}$$

En particulier, on a l'identité fonctionnelle $T(\lambda f+\mu g) = \lambda T(f)+\mu T(g)$.
En conclusion, l'application $T : f \mapsto T(f)$ définit un endomorphisme de E

3. L'application T ne peut pas être surjective d'après le résultat de la question 1, car $\mathrm{Im}(T) \subset E_1 \subset E$ avec $E_1 \neq E$ donc $\mathrm{Im}(T) \neq E$ 11h43

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\mathrm{d}t$$

En procédant au changement de variable $t = -u$,

- comme $t->-t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-x-1, -x+1]$ à valeurs dans $[x-1,x+1]$
- comme $u->f(u)$ est continue sur $[x-1,x+1]$

nous obtenons que

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{x+1}^{x-1} f(-u) - \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-u)\mathrm{d}u$$

Et par parité (ou l'imparité) de f, nous obtenons que

$$T(f)(-x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(u)\mathrm{d}u = T(f)(x) & \text{cas } f \text{ pair} \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} -f(u)\mathrm{d}u = -T(f)(x) & \text{cas } f \text{ impair} \end{cases}$$

En conclusion, la fonction $T(f)$ est paire sir f est pair et impaire si f est impaire.

5. Soit $f \in E$ tel que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admette une limite finie en $+\infty$. En remarquant que

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(F(x+1)-F(x)\right)$$

et qu'il existe un nombre réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$. Nous obtenons d'une part que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x+1) = \ell = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x-1)$ et d'autre part que

$$\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \frac{1}{2}(\ell-\ell) = 0$$

6. Pour $x \in \mathbb{R}$, il résulte de la 2π-périodicité de cos que

$$\begin{array}{ll} T(s)(x) & = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} \sin(\pi t)\mathrm{d}t \\ & = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\right]_{x-1}^{x+1} \\ & = \frac{1}{2\pi}\left(-\cos(\pi x-\pi)+-\cos(\pi x+\pi)\right) = 0 \end{array}$$

En particulier, nous obtenons l'identité fonctionnelle $T(s)=0$.
Comme $s\in\mathrm{Ker}(T)$ t que $s\neq 0$, on a $\mathrm{Ker}(T)\neq\{0\}$ de sorte que T n'est pas injective. 11h58

Partie II.

1. Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} T(f_a)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f_a(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{at}}{a}\right]_{x-1}^{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{a(x+1)}-\mathrm{e}^{a(x-1)}}{a} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{a}-\mathrm{e}^{-a}}{a}\mathrm{e}^{ax} \end{aligned}$$

Lorsque $a=0$ et $x\in\mathbb{R}$, c'est plus simple, on a

$$\begin{aligned} T(f_a)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f_a(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\times 2 = 1 \end{aligned}$$

2. On remarque que le résultat de la question précédente s'exprime sous la forme

$$T(f_a)(x)=\begin{cases}\varphi(a)\mathrm{e}^{ax} & =\varphi(a)f_a(x) \quad \text{si } a\neq 0\\ 1 & =\varphi(a)f_a(x) \quad \text{si } a=0\end{cases} =\varphi(a)f_a(x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

En particulier, on en déduit l'identité fonctionnelle $T(f_a)=\varphi(a)f_a$.

3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Et on a

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}\frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})x-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^x(x-1)+\mathrm{e}^{-x}(x+1)}{x^2} \qquad (x\in\mathbb{R}^*)$$

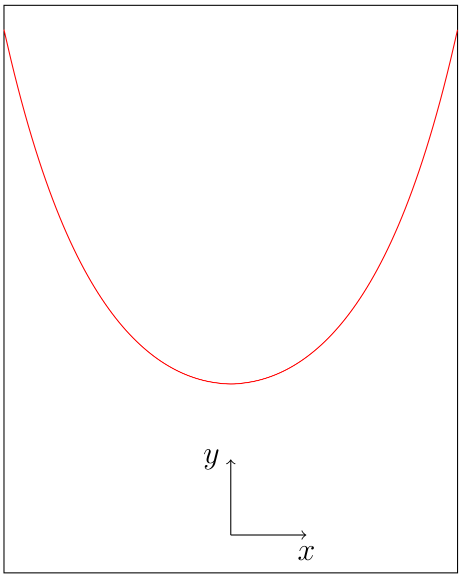
De plus, φ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 car

$$\varphi(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)-(1-x+(-x)^2o_0(x))}{2x}=1+o_0(x)=\varphi(0)+o_0(x)$$

En particulier, φ est continue en 0 et dérivable en 0 de dérivée $\varphi'(0)=0$ En conclusion, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et on a calculé sa dérivée). (12h15)
Posons $g(a)=\mathrm{e}^a(a-1)+\mathrm{e}^{-a}(a+1)$. La fonction g est de class $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(a)=\mathrm{e}^a(a-1)+\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}(a+1)+\mathrm{e}^{-a}=a(\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a})$$

En particulier $g'(a)>0$ pour $a>0$, $g'(0)=0$ et $g'(a)<0$ pour $a<0$. Comme $g(0)=1-1=0$ nous concluons que $g(a)$ est nulle en 0 et strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. A fortiori, il résulte du résultat de la question II2 que l'application φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Allure de φ :



Pas eu le temps de rédiger la suite (et pas sûr que je l'ai dans les semaines qui suivent, je vais joindre un corrigé d'autres professeurs, pour la suite)