Eléments de correction du DS 5

Exercice 1: `extrait d'Ecricome S 2018`

1. Par stricte croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$. : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+\sqrt{4}}{2} = \frac{3}{2} > 1$.
   Le discriminant de $x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 1 - (-4) = 5$. Deux racines réelles distinctes $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Or, à l'aide de la quantité conjuguée, $\frac{-1}{\varphi} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{-2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
2. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $H_n : \left(u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}\right)$.
   Au rang 0, on a $u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1$ donc $u_0 u_2 - u_1^2 = -1 = (-1)^{0+1}$. Donc H_0 est vraie.
   Supposons H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1}u_{n+3} - u_{n+2}^2 = u_{n+1}(u_{n+1}+u_{n+2}) - u_{n+2}^2 = u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n+2} - u_{n+2}^2 = (u_n u_{n+2} - (-1)^{n+1}) + u_{n+1}u_{n+2} - u_{n+2}^2 = u_{n+2}[u_n + u_{n+1} - u_{n+2}] - (-1)^{n+1} = 0 + (-1)^{n+2} = u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = -(u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2) \underset{H_n}{=} -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$. Donc H_{n+1} vraie. (il y a plein d'autres façons de mener ce calcul). Conclure.
3. (a)
```
function u=suite(n)
v=0
w=1
for k=2:n      // ici v vaut u(k-2) et w vaut u(k-1)
aux = v+w  // temporaire vaut u(k-2) + u(k-1) = u(k)
v = w   // v vaut u(k-1)
w = aux   // w vaut u(k)
end    // en sortie de boucle k=n et w vaut u(n)
u= w
endfunction
```
   (b) Suite récurrente linéaire d'ordre deux. Donc avec 1., on obtient l'existence et l'unicité du couple (λ, μ). Il reste à les déterminer : on résout
   $$\begin{cases} \lambda\varphi^0 + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^0 = u_0 \\ \lambda\varphi^1 + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^1 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\varphi + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda\left(\varphi + \left(\frac{1}{\varphi}\right)\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\frac{\varphi}{\varphi^2+1} \\ \lambda = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \end{cases}$$
   (c) On a $\varphi > 1$ donc $\varphi^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $|\frac{-1}{\varphi}| = \frac{1}{\varphi} < 1$ donc $(\frac{-1}{\varphi})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où, comme $\lambda \neq 0$, $\mu(\frac{-1}{\varphi})^n = o(\lambda\varphi^n)$ et finalement, $u_n \sim \lambda\varphi^n$. Ou vérifier via le quotient.
   (d) Remarquer que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ a du sens car les termes u_n sont tous non-nuls (on pourrait facilement montrer que la suite (u_n) est croissante). Puis, d'après (c), on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\lambda\varphi^{n+1}}{\lambda\varphi^n} = \varphi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi \in \mathbb{R}$. Donc la suite converge vers φ.
4. (a) On a $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\lambda^2\varphi}\left(\dfrac{1}{\varphi^2}\right)^n$. Or $\varphi > 1$ donc $0 < \frac{1}{\varphi^2} < 1$ donc la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n$ converge.
   Donc d'après le critère par équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.
   (b) $\left|\frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}\right| = \frac{1}{u_k u_{k+1}}$ donc d'après (a), la série $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ est absolument convergente donc convergente donc par définition la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de ses sommes partielles converge.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{n+1} - S_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}u_{n+2}} \underset{Q3}{=} \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}u_{n+2}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$.
   (d) Soit $N \in \mathbb{N}, N > 1$, on somme ce qui précède de $n = 1$ à $n = N$ puis on réalise deux télescopages.
   $\sum\limits_{n=1}^{N}(S_{n+1} - S_n) = \sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right)$ donc $S_{N+1} - S_1 = \frac{u_1}{u_{1+1}} - \frac{u_{N+1}}{u_{N+2}}$
   donc $S_{N+1} - \left(\frac{-1}{u_1 u_2}\right) = 1 - \frac{u_{N+1}}{u_{N+2}}$ Donc $\frac{u_{N+1}}{u_{N+2}} = -S_{N+1}$.
   La question 4.c) a montré que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$. Donc $\frac{u_{N+1}}{u_{N+2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\varphi}$. Par conséquent, un passage à la limite dans la relation $\dfrac{u_{N+1}}{u_{N+2}} = -S_{N+1}$ lorsque $N \to +\infty$ indique que $\frac{1}{\varphi} = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ Pour conclure, il reste à établir que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. or $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{2}{2} = \varphi - 1$.

Exercice 2: `inspiré d'Edhec E 2018`

1. $g : t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle du type $[0,x]$, avec $x \in \mathbb{R}$. D'où $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 \geq 1$ donc $\ln(1+t^2) \geq 0$. Donc si $x \geq 0$, les bornes sont dans le bon sens et $f(x) \geq 0$ et si $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$.

2. g est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental, f est l'unique primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. En particulier, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x) = \ln(1+x^2) \geq 0$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \geq 1$. Alors $f(x) = \int_0^1 \ln(1+t^2)dt + \int_1^x \ln(1+t^2)dt \geq 0 + \int_1^x \ln(1+t^2)dt$ (par positivité de l'intégrande). De plus si $1 \leq t (\leq x)$, alors $t^2 \geq t$ d'où $1+t^2 \geq 1+t \geq t$ et $\ln(1+t^2) \geq \ln(t)$. Par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq \int_1^x \ln(t)dt$. Finalement, $f(x) \geq [t\ln(t) - t]_1^x = x\ln x - x + 1 = x(\ln(x) - 1) + 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2)dt$. On pose le changement de variable C^1 $t \mapsto -t$. Alors $y = -t$, $dy = -dt$ et les bornes : $t = 0 \Rightarrow y = 0$ et $t = -x \Rightarrow y = x$ d'où $f(-x) = \int_0^x \ln(1+(-y)^2)(-dy) = -\int_0^x \ln(1+y^2)dy = -f(x)$.

5. Vu l'expression de f', f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Donc f'' est négative sur $]-\infty, 0]$, s'annule en 0 et est positive sur $[0, +\infty[$. On en déduit que f est concave sur $]-\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$ et admet un point d'inflexion en 0.

6. (a) $a = 1$ et $b = -1$
(b) IPP : $u = \ln(1+t^2)$ et $v' = 1$. Alors $u' = \frac{2t}{\ln(1+t^2)}$ et $v = t$. Comme u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}$,
$f(x) = [t\ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt$ et en utilisant le (a) : $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2(\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt) = x\ln(1+x^2) - 2[t - \arctan(t)]_0^x = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)$ puisque $\arctan(0) = 0$

7. (a) Or $\arctan(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ donc $\arctan(x) = o(x\ln(1+x^2))$, et on peut montrer de même que $2x = o(x\ln(1+x^2))$ (faire le quotient). D'où par somme, $f(x) \sim x\ln(1+x^2)$. Enfin, il reste à montrer que $\ln(1+x^2) \sim \ln(x^2) = 2x$ (pour $x > 0$) pour obtenir le résultat voulu : or $\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x^2)} = \frac{\ln(x^2(1+1/x^2))}{\ln(x^2)} = \frac{\ln(x^2)+\ln(1+x^2)}{\ln(x^2)} = 1 + \frac{\ln(1+1/x^2)}{\ln(x^2)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
(b) on utilise l'imparité : soit $x < 0$ (l'idée est de faire tendre x vers $-\infty$). Alors $-x > 0$ et $f(x) = -f(-x) \sim -(-2x\ln(-x)) = 2x\ln(-x)$.

8. Equation de la tangente en 0, point d'inflexion : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $y = 0$. A gauche en 0, la fonction est concave donc arrive en-dessous de la tangente, et à droite, repart au-dessus de la tangente. La courbe intersecte la tangente en 0. Ne pas oublier f impaire, et l'équivalent en $+\infty$ donne une croissance assez rapide.

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)^n}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus $1+t^2 \underset{t \to +\infty}{\sim} t^2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \sim \frac{1}{(t^2)^n} = \frac{1}{t^{2n}}$. Comme $2n \geq 2 > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}$ converge, donc d'après le critère d'équivalence pour les fonctions continues et positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$ converge. Puis par continuité de l'intégrande sur $[0,1]$, on en déduit que l'intégrale u_n converge bien.
(b) Poser $A > 0$. Alors $\int_1^A \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(1+t^2)]_0^A = \arctan(A) - \arctan(0) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Donc $u_1 = \frac{\pi}{2}$.
(c) Par linéarité, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-(1+t^2)}{(1+t^2)^{n+1}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt \leq 0$, puisque pour tout $t \geq 0$, $\frac{-t}{(1+t^2)^{n+1}} \leq 0$, et les bornes sont dans le bon sens. De plus, pour des raisons très similaires, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$, donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge.
(d) IPP $u = \frac{1}{1+t^2)^n} = (1+t^2)^{-n}$ et $v' = 1$ d'où, $u' = -n2t(1+t^2)^{-n-1} = \frac{-n2t}{(1+t^2)^{n+1}}$ et $v = t$. u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Il reste à poser $A > 0$. Alors $\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = [\frac{t}{(1+t^2)^n}]_0^A + 2n\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt = \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0 + 2n(u_n - u_{n+1})$ (vu le calcul du (c) pour la monotonie). Finalement, on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2n(u_n - u_{n+1})$.
(e) On en déduit : $u_n = 2nu_n - 2nu_{n+1}$ soit encore $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}u_n$.
(f) Par récurrence : pour $n = 1$, $u_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{0!}{2^0 \times (0!)^2}\frac{\pi}{2} = 1 \times \frac{\pi}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}\frac{\pi}{2}$ et montrons que $u_{n+1} = \frac{2n!}{2^{2n} \times (n!)^2}\frac{\pi}{2}$.
Or $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}u_n = \frac{2n-1}{2n}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}\frac{\pi}{2} \times \frac{2n}{2n} = \frac{(2n)!}{2 \times n \times 2 \times n \times (2^{2n-2}((n-1)!)^2)}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n(n-1)!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2n!}{2^{2n} \times (n!)^2}\frac{\pi}{2}$.
Conclure.

Exercice 2, version plus difficile :`Ecricome S 2009`

1. (a) cf cours : $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt = \frac{1}{a}$.

   (b) $t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$: $1+x^2e^{2t} \sim x^2e^{2t}$ d'où $\sqrt{1+x^2e^{2t}} \sim \sqrt{x^2e^{2t}} = |x|e^t$ et finalement $e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \sim |x|e^{-t}$. On conclut à l'aide du critère d'équivalence pour les fonctions continues et positives.

   (c) On a donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ converge. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+(-x)^2e^{2t}}dt = f(x)$ car $(-x)^2 = x^2$.

2. (a) posons $g : y \mapsto \sqrt{1+y}$. Alors g est C^2 sur $\mathbb{R}^+$ et $g'(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y}}$ et $g''(y) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\sqrt{1+y})^3} \leq 0$. Donc g est concave, et sa courbe est en-dessous de ses tangentes. Or en 0, la tangente a pour équation : $y = \frac{1}{2}x+1$. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{1}{2}x$. (inégalité fine près de la tangente, donc au voisinage de 0^+, grossier ensuite)

   (b) Le membre de gauche vient de $1+x^2e^{2t} \geq x^2e^{2t}$ d'où $\sqrt{1+x^2e^{2t}} \geq \sqrt{x^2e^{2t}} = |x|e^t = xe^t$ puisque $x \geq 0$.
   Le membre de droite utilise (a) : il faut réécrire pour deviner le y petit qu'on va choisir (car x^2e^{2t} grand pour t grand). Or $\sqrt{1+x^2e^{2t}} = \sqrt{x^2e^{2t}(\frac{1}{x^2}e^{-2t}+1)} = \sqrt{x^2e^{2t}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}e^{-2t}} \leq xe^t(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}e^{-2t}) = xe^t+\frac{1}{2}\frac{1}{x}e^{-t}$.

   (c) Il reste à multiplier par e^{-2t}, puis à utiliser la croissance de l'intégrale, puisque toutes les intégrales en jeu convergent bien d'après 1.(a). On obtient $\int_0^{+\infty} xe^{-t}dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} xe^{-t}dt + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-3t}}{2x}dt$ d'où (cf le calcul 1.(a)) : $x \leq f(x) + x + \frac{1}{2x}\frac{1}{3} = x+\frac{1}{6x}$.

   (d) Vu l'encadrement du (c), on devine : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Montrons le. D'après (c), pour tout $x>0$, $1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1+\frac{1}{6x^2}$.
   Il reste à appliquer le théorème d'encadrement quand $x \to +\infty$: on obtient $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ càd $f(x) \sim x$. En $-\infty$, utilisons la parité. Soit $x<0$, $x \to -\infty$), alors $f(x) = f(-x) \sim -x$ puisque $-x \to +\infty$. D'où $f(x) \underset{x\to-\infty}{-} x$.

3. (a) Changement de variable licite car : $t \mapsto xe^t$ est de classe C^1 (et bijectif). Posons $A>0$. Alors $u = xe^t$, $du = xe^tdt$ d'où $t = \ln(\frac{u}{x}) = \ln(u)-\ln(x)$, $dt = \frac{du}{u}$. Bornes : $t=0 \Rightarrow u=x$ et $t=A \Rightarrow u = xe^A$. Finalement, $\int_0^A e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt = \int_x^{xe^A}\frac{x^2}{u^2}\sqrt{1+u^2}\frac{du}{u} = x^2\int_x^{xe^A}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du$.
   D'où le résultat, par passage à la limite quand $A \to +\infty$. (vu que la limite à gauche existe et est finie, celle de droite aussi !, ce qui justifie la cv de la nouvelle intégrale).

   (b) Maintenant que le x est dans les bornes (et à l'extérieur), on peut faire "comme d'habitude". $u \mapsto \frac{1+u^2}{u^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet une primitive F sur cet intervalle. Alors $h(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du = \lim_{A\to+\infty}[F(t)]_x^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty} F(A)-F(x)$. On sait que $\lim_{A\to+\infty} F(A) \in \mathbb{R}$ par convergence de l'intégrale, donc h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme somme d'une constante et de F), et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = 0-F'(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}$. Finalement, par produit, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 2xh(x)+x^2h'(x) = 2\frac{f(x)}{x} - x^2\sqrt{1+x^2}x^3 = \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}$.

   (c) IPP $u' = \frac{1}{u^3}$ et $v = \sqrt{1+u^2}$, d'où $u = -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}$ et $v' = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$. u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Il reste à poser $A>0$. Alors $x^2\int_x^A\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du = x^2[-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^2}]_x^A + \frac{1}{2}\int_x^A\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}du$. Il reste à passer à la limite quand $A \to +\infty$, puis à multiplier par 2, pour obtenir le résultat voulu.

   (d) On déduit de (c) que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2f(x)-\sqrt{1+x^2} = x^2\int_x^{+\infty}\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \geq 0$ (bornes dans le bon sens, intégrande positif ...). D'où $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. (a)Attention, reprendre la forme initiale (l'autre n'est vraie que pour $x>0$). $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{1}{2}$, d'après 1.(a)

   (b) Le membre de gauche s'obtient comme au (d). Pour le membre de droite, il faut majorer $\frac{x^2}{2}\int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}du$. Or pour $u>0$, $\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} \leq \frac{1}{u\sqrt{u^2}} = \frac{1}{u^2}$ d'où $\frac{x^2}{2}\int_x^{+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}du \leq \frac{x^2}{2}\int_x^{+\infty}\frac{1}{u^2}du$ (croissance de l'intégrale, intégrale de Riemann convergente) $= \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$.
   Théorème d'encadrement : $x \underset{>}{\to} 0$. comme $\sqrt{1+x} \to 1$, on obtient $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0. Comme f est paire, on obtient que f est continue en 0.

5. Faire le tv sur $\mathbb{R}^+$, puis utiliser la parité. Attention, mettre un ? pour la dérivée en 0 (non étudiée).

Exercice 3:

Partie I `Edhec S 98`

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $deg(P) \leq n$, d'où $deg(P') \leq n-1$ et $deg((X-1)P') \leq 1+(n-1) = n$. De même, $deg(XP'') \leq n-1$ d'où par somme, $deg(\varphi(P)) \leq n$, et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
   Linéarité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(\lambda P + Q) = (X-1)(\lambda P + Q)' - X(\lambda P + Q)''$ et par linéarité de la dérivation, $= (X-1)(\lambda P' + Q') - X(\lambda P'' + Q'') = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.
2. Pour $j = 0$, $\varphi(1) = 0$ (car $P(X) = 1 \Rightarrow P'(X) = 0 = P''(X)$), pour $j = 1$: $\varphi(X) = (X-1)\times 1 + 0 = X - 1$ et pour $j \geq 2$, $\varphi(X^j) = (X-1)jX^{j-1} - Xj(j-1)X^{j-2} = jX^j - j^2X^{j-1}$. En particulier, on peut remarquer que pour tout $j \geq 1$, $deg(\varphi(X^j)) = j$.
3. $Im(\varphi) = Vect(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), ..., \varphi(X^n)) = Vect(X-1, 2X^2-4X, ..., jX^j - j^2X^{j-1}, ..., nX^n - n^2X^{n-1})$. Comme les polynômes sont non-nuls et forment une famille échelonnée en degrés, la famille $(X-1, 2X^2-4X, ..., jX^j - j^2X^{j-1}, ..., nX^n - n^2X^{n-1})$ est de plus libre, donc c'est une base de $Im(\varphi)$. En particulier, $rg(\varphi) = n$.
4. D'après le théorème du rang, comme $dim(Ker(\varphi)) + rg(\varphi) = dim(\mathbb{R}_n[X])$, on en déduit que $dim(Ker(\varphi)) = 1$. Or $\varphi(1) = 0$: $1 \in Ker(\varphi)$. De plus, le polynôme 1 est non-nul, donc il forme une famille libre et de bon cardinal de $Ker(\varphi)$. C'est une base de $Ker(\varphi)$.

Partie II `inspiré d'esclsca S 81`

1. (a) on trouve : $f(0) = b + d$ et $f'(0) = 2b + a - 2d + c$.

   (b) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x) = 0$, ce qui donne : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ où f est la fonction du (a). En particulier, on en déduit $f(0) = 0 = f'(0) = f''(0) = f'''(0)$ puisque f est la fonction nulle. On obtient ainsi 4 équations (ce qu'il nous fallait, vu qu'on avait 4 inconnues).
   On résout $\begin{cases} b+d & = 0 \\ a+2b+c-2d & = 0 \\ a+b-c+d & = 0 \\ 3a+2b+3c-2d & = 0 \end{cases}$ Choisir alors L_3 comme ligne pivot (ou une autre ...), et finir la résolution à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. On trouve $a = b = c = d = 0$. La famille est bien libre.

   (c) Vu la définition de E, on a $E = Vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$ puisque toute fonction de E s'écrit $f : x \mapsto (ax+b)e^{2x} + (cx+d)e^{-2x} = axe^{2x} + be^{2x} + cxe^{-2x} + de^{-2x} = af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x)$, avec a, b, c, d réels quelconques. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et comme de plus, la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre, c'est une base de E. En particulier, $dim(E) = 4$.

2. Soit $f(x) = (ax+b)e^{2x} + (cx+d)e^{-2x}$ un élément de E. Comme f est définie sur $\mathbb{R}$, f est paire ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $(ax+b)e^{2x} + (cx+d)e^{-2x} = (-ax+b)e^{-2x} + (-cx+d)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $((a+c)x + (b-d))e^{2x} + ((a+c)x + (d-b))e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow (a+c)f_1 + (b-d)f_2 + (a+c)f_3 + (d-b)f_4 = 0$.
   Or la famille est libre, donc ceci est équivalent à $\begin{cases} a+c & = 0 \\ b-d & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ d = b \end{cases}$. Finalement, une fonction f de P s'écrit $f(x) = a(xe^{2x} - xe^{2x}) + b(e^{2x} + e^{-2x})$, avec a, b réels quelconques.
   D'où $P = Vect(f_1 - f_3, f_2 + f_4)$ et $dim(P) = 2$.

   (b) De même pour I : on trouve $I = Vect(f_1 + f_3, f_2 - f_4)$.

   (c) $dim(I) + dim(P) = 2 + 2 = 4 = dim(E)$, et $I + P = Vect(f_1 + f_3, f_2 - f_4, f_1 - f_3, f_2 + f_4) = Vect(f_1 + f_3, f_2 - f_4, f_1, f_2) = Vect(f_3, f_4, f_1, f_2) = E$ (opérations sur le Vect à préciser). Ou regarder $I \cap P$ et montrer par double inclusion que $I \cap P = \{0\}$...

Exercice 4: `Eml E 2018`

1. (a) Les deux piles peuvent arriver tout de suite (et $X = 0$), ou arriver beaucoup plus tard : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On introduit pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, P_i (resp. F_i) "le lancer i donne pile (resp. face)". Alors $(X = 0) = P_1 \cap P_2$ et $(X = 1) = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$.

   (b) Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ est réalisé si exactement n faces sont obtenus. Il faut donc avoir fait $n + 2$ lancers au total, avec le dernier qui donne pile (la place du premier pile est par contre libre). D'où $(X = n) = (P_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap ... \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \cup ... \cup (F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2})$ réunion de $n + 1$ événements 2 à 2 incompatibles, et tous de même probabilité (indépendance et même pièce) $P(P_1)P(F_2)...P(F_{n+1})P(P_{n+2}) = (\frac{1}{3})^n(\frac{2}{3})^2$. D'où $P(X = n) = (n + 1)(\frac{1}{3})^n(\frac{2}{3})^2 = (n + 1)\frac{4}{3^{n+2}}$

   (c)
```
function x=simule_X()
n=0, nbre_pile =0
while nbre_pile<2
while rand()< 2/3, n=n+1, end
nbre_pile=nbre_pile+1
end
x=n
endfunction
```
   ou enchainer deux fois de suite la même boucle while ...

2. (a) X pouvant prendre des valeurs très grandes, U le peut aussi. Il y a également une boule 0. $U(\Omega) = \mathbb{N}$

   (b) Sachant $(X = n)$, U suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$, puisque le tirage se fait au hasard dans l'urne qui contient les boules numérotées de 0 à n. D'où $\begin{cases} P_{(X=n)}(U = k) = \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

   (c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $\{(X = n), n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(U = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P_{(X=n)}(U = k) = \sum_{n=0}^{k-1} P(X = n)P_{(X=n)}(U = k) + \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n)P_{(X=n)}(U = k) = 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n)\frac{1}{n+1} = \frac{4}{3^2}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$ d'après 1.(b) $= \frac{4}{3^2}\sum_{n=k}^{+\infty}(\frac{1}{3})^n = \frac{4}{9}\frac{(1/3)^k}{1-1/3} = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^k = \frac{2}{3^{k+1}}$.

   (d) Il faut étudier la convergence absolue de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}}$ ce qui revient à la convergence car la série est à termes positifs. Or $k\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^2}[k(\frac{1}{3})^{k-1}]$ terme général de la série géométrique dérivée première qui converge, puisque $|\frac{1}{3}| < 1$. D'où X admet une espérance et $E(X) = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{+\infty} k(\frac{1}{3})^{k-1} = \frac{4}{9}\frac{1}{(1-(1/3))^2} = \frac{1}{2}$. Pour la variance, il faut commencer par étudier la série associée à $E(X^2)$ ou à $E(X(X-1))$ on trouve : $E(X^2) = 1$ puis par la formule de Koenig Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{4}$.

   (e) `U=floor(x*rand())+1`

3. (a) i. `function y=simule_Y(p), n=0, while rand()>p, n=n+1, end, y=n, endfunction`

   ii. La fonction mystère répète un grand nombre de fois (à savoir $N = 10^4$), le jeu décrit au-dessus, et renvoie la une valeur approchée de la probabilité que le joueur A gagne, puisqu'il renvoie la proportion nombre parties gagnées / nombre parties jouées : c'est donc une estimation de la probabilité que A gagne.

   iii. Le jeu est équilibré si le joueur A a même proba de gagner que le joueur B, à savoir une probabilité égale à 1/2. Gaphiquement, la courbe croise le niveau seuil $\frac{1}{2}$ un peu après 0.8 : on pourrait conjecturer $p = 0.82$ (ou $p = 0.83$ ... mais cela reste une estimation de la "vraie" courbe, donc inutile d'être trop précis dans la lecture !)

   (b) $Z = Y + 1$ représente le nombre de lancers pour obtenir le premier pile : les lancers sont indépendants et effectués avec la même pièce. Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

   (c) Comme Z admet une espérance, par linéarité, Y en admet une et $E(Y) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$. Et comme Z admet une variance, Y en admet une et $V(Y) = 1 * V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

   (d) $(Y \geq n) = (Z \geq n + 1) = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty}(Z = k)$ réunion d'événements 2 à 2 incompatibles, donc par $\sigma-$additivité, $P(Y \geq n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z = k) = p\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1 - p)^{k-1} = p\sum_{k=n}^{+\infty}(1 - p)^k = p\frac{(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1 - p)^n$.

   (e) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $(X \leq Y) = \bigcup_{n=0}^{+\infty}[(X = n) \cap (Y \geq n)]$ réunion d'événements 2 à 2 incompatibles. D'où $P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y \geq n))$ et par indép. des lancers (des joueurs) $= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n)$ $= \sum_{n=0}^{+\infty}(n + 1)\frac{4}{3^{n+2}}(1 - p)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{4}{3^{m+1}}(1 - p)^{m-1} = \frac{4}{9}\sum_{m=1}^{+\infty}(\frac{1-p}{3})^{m-1} = \frac{4}{9}\frac{1}{(1-(1-p)/3)^2} = \frac{4}{(2+p)^2}$.

   (f) Le jeu est équilibré dès que $P(\text{"}Agagne\text{"}) = \frac{1}{2}$ càd $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$. On résout : $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2 + p)^2 = 8 \Leftrightarrow p = \sqrt{8} - 2$ (car $p \in [0, 1]$). Application numérique : $\sqrt{8} - 2 \simeq 0.828$.