Eléments de correction du devoir maison 1

1. $\mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1+x>0 \text{ et } 1-x>0 \text{ et } \ln(1-x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x>-1,\, x<1 \text{ et } 1-x \neq 1\} =]-1,0[\cup]0,1[$.
2. $\lim\limits_{x\to -1} 1+x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$, et comme $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1-x) = \ln 2 > 0$, par quotient, $\lim\limits_{x\to -1} \varphi(x) = -\infty$.
   Asymptote verticale en $x=-1$. De même, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln 2$, d'où $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = 0$.
3. a) Limite usuelle : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ puis en posant $X=-x$, on a d'une part $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ et d'autre part,
   $\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+X)}{-X} = -\frac{\ln(1+X)}{X}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{X\to 0} -\frac{\ln(1+X)}{X} = -1$.
   b) Il suffit de remarquer que $\varphi(x) = \dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}}$ d'où par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{1}{-1} = -1$.
4. (a) φ est dérivable sur $\mathcal{D}_\varphi$ et $\varphi'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) - \ln(1+x)(-\frac{1}{1-x})}{(\ln(1-x)^2)} = \dfrac{\frac{(1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1-x)}}{(\ln(1-x)^2)}$.
   On conclut en remarquant que $(1+x)(1-x) = (1-x^2)$ et que $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b\times c}$.
   (b) h dérivable sur $]-1,1[$ et $h'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x} + \ln(1+x) + (x+1)\frac{1}{x+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.
   (c) Inéquation définie sur $]-1,1[$. Puis par stricte croissance de l'exp, $\ln(1-x) < \ln(1+x) \Leftrightarrow 1-x < 1+x$ $\Leftrightarrow 0 < 2x \Leftrightarrow 0 < x$.
   (d) h admet un minimum en 0 et $h(0)=0$ donc h positive sur $]-1,1[$.
   (e) $\lim\limits_{x\to 1}(1+x)\ln(1+x) = 2\ln(2)$. Pour l'autre moitié, poser $X = 1-x$, en remarquant que $\lim\limits_{x\to 1} X = 0^+$. Alors $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$ d'après les croissances comparées. Donc $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2\ln 2$.
   (f) $h \geq 0$ sur $]-1,1[$, et de plus $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, donc φ croissante. (Dans le TV, la double barre est facultative pour φ en 0 car la limite est -1 en 0^+ et en 0^- : φ se prolonge par continuité en 0).
5. Pour $x \in \mathcal{D}_\varphi$: $\varphi(x) = -2 \Leftrightarrow \ln(1+x) = -2\ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \ln(1/(1-x)^2) \Leftrightarrow (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
   $\Leftrightarrow (1+x)(1-x)^2 = 1 \Leftrightarrow -x-x^2+x^3 = 0 \Leftrightarrow x(-1-x+x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ car $x \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$).
   Deux racines éventuelles : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or $4<5<9 \Rightarrow 2<\sqrt{5}<3 \Rightarrow 3 < 1+\sqrt{5} \Rightarrow 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathcal{D}_\varphi$. Mais $-3 < \sqrt{5} < -2 \Rightarrow -2 < 1-\sqrt{5} < -1 \Rightarrow -1\frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2} < 0$ et donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in \mathcal{D}_\varphi$.
   Conclusion : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution de cette équation.

Eléments de correction du devoir maison 1

1. $\mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1+x>0 \text{ et } 1-x>0 \text{ et } \ln(1-x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x>-1,\, x<1 \text{ et } 1-x \neq 1\} =]-1,0[\cup]0,1[$.
2. $\lim\limits_{x\to -1} 1+x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$, et comme $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1-x) = \ln 2 > 0$, par quotient, $\lim\limits_{x\to -1} \varphi(x) = -\infty$.
   Asymptote verticale en $x=-1$. De même, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln 2$, d'où $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = 0$.
3. a) Limite usuelle : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ puis en posant $X=-x$, on a d'une part $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ et d'autre part,
   $\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+X)}{-X} = -\frac{\ln(1+X)}{X}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{X\to 0} -\frac{\ln(1+X)}{X} = -1$.
   b) Il suffit de remarquer que $\varphi(x) = \dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}}$ d'où par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{1}{-1} = -1$.
4. (a) φ est dérivable sur $\mathcal{D}_\varphi$ et $\varphi'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) - \ln(1+x)(-\frac{1}{1-x})}{(\ln(1-x)^2)} = \dfrac{\frac{(1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1-x)}}{(\ln(1-x)^2)}$.
   On conclut en remarquant que $(1+x)(1-x) = (1-x^2)$ et que $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b\times c}$.
   (b) h dérivable sur $]-1,1[$ et $h'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x} + \ln(1+x) + (x+1)\frac{1}{x+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.
   (c) Inéquation définie sur $]-1,1[$. Puis par stricte croissance de l'exp, $\ln(1-x) < \ln(1+x) \Leftrightarrow 1-x < 1+x$ $\Leftrightarrow 0 < 2x \Leftrightarrow 0 < x$.
   (d) h admet un minimum en 0 et $h(0)=0$ donc h positive sur $]-1,1[$.
   (e) $\lim\limits_{x\to 1}(1+x)\ln(1+x) = 2\ln(2)$. Pour l'autre moitié, poser $X = 1-x$, en remarquant que $\lim\limits_{x\to 1} X = 0^+$. Alors $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$ d'après les croissances comparées. Donc $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2\ln 2$.
   (f) $h \geq 0$ sur $]-1,1[$, et de plus $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, donc φ croissante. (Dans le TV, la double barre est facultative pour φ en 0 car la limite est -1 en 0^+ et en 0^- : φ se prolonge par continuité en 0).
5. Pour $x \in \mathcal{D}_\varphi$: $\varphi(x) = -2 \Leftrightarrow \ln(1+x) = -2\ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \ln(1/(1-x)^2) \Leftrightarrow (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
   $\Leftrightarrow (1+x)(1-x)^2 = 1 \Leftrightarrow -x-x^2+x^3 = 0 \Leftrightarrow x(-1-x+x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ car $x \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$).
   Deux racines éventuelles : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or $4<5<9 \Rightarrow 2<\sqrt{5}<3 \Rightarrow 3 < 1+\sqrt{5} \Rightarrow 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathcal{D}_\varphi$. Mais $-3 < \sqrt{5} < -2 \Rightarrow -2 < 1-\sqrt{5} < -1 \Rightarrow -1\frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2} < 0$ et donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in \mathcal{D}_\varphi$.
   Conclusion : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution de cette équation.