

Eléments de correction du DS 4

Questions :

- il suffit de mq E est un sev de l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et si v est la suite nulle : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n + 2v_{n+2} = 0$ Donc $v \in E$ et $E \neq \emptyset$. Puis soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda u_n + v_n) + 2(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) = \lambda(u_n + 2u_{n+2}) + (v_n + 2v_{n+2}) = \lambda * 0 + 0 = 0$. Donc $\lambda u + v \in E$.
- Notons f et g les deux fonctions : soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) = 0$. En particulier avec $x = 0$ et $x = 1$ on obtient $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 e + \lambda_2 e = 0 \end{cases}$ ce qui implique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
- a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f(P) + f(Q) = (\lambda P(0) + Q(0), \lambda P'(1) + Q'(1), \lambda P''(0) + Q''(0))$ et par linéarité de la dérivation $= (\lambda P(0) + Q(0), (\lambda P + Q)'(1), (\lambda P + Q)''(0)) = f(\lambda P + Q)$
b) avec $P(X) = 1, f(1) = (1, 0, 0)$; avec $P(X) = X, f(X) = (0, 1, 0)$ et avec $P(X) = X^2, f(X^2) = (0, 2, 2)$. Montrons que $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$: soit $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons : $\exists! (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 2, 2) = (x, y, z)$. On obtient directement un sys. triangulaire qui est de Cramer. Donc les 3 vecteurs images forment une base de $\mathbb{R}^3$ donc f est bijective.

Exercice 1:

- posons $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc $G : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. En particulier G est définie (même dérivable, même C^1 !) sur $\mathbb{R}$ d'où F est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$ donc si $x > 0$ alors $G(x) \geq 0$ et par produit, $F(x) \geq 0$.
Si $x < 0$, alors $G(x) = -\int_x^0 f(t) dt \leq 0$ et par produit, $F(x) \geq 0$. F est positive sur $\mathbb{R}^*$.
- Changement de variable $y = -t$. Alors $dy = -dt$ et $t = 0 \Rightarrow y = 0, t = -x \Rightarrow y = x$.
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $F(-x) = -\frac{1}{x} \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -\frac{1}{x} \int_0^x \frac{-dy}{\sqrt{1+(-y)^4}} = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = F(x)$. F est paire sur $\mathbb{R}^*$.
- On a $F(x) = \frac{1}{x} G(x) = \frac{G(x)-G(0)}{x-0}$ puisque $G(0) = 0$. Or G (primitive de f) est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0 et $G' = f$, d'où $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} G'(0) = f(0) = 1 \in \mathbb{R}$. Donc F se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 1.
- Soit $x > 0$. $\forall t \in \mathbb{R}, 1+t^4 \geq 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq 1$, d'où $(0 < x), \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \leq \int_0^x 1 dt = x$ et $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \leq 1$.
- par 1. G dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' = f$ continue donc $G \in C^1$ sur $\mathbb{R}$, et par produit avec $x \mapsto \frac{1}{x} \in C^1$ sur $\mathbb{R}^*, F \in C^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) = -\frac{1}{x^2} G(x) + \frac{1}{x} G'(x) = -\frac{1}{x} (\frac{1}{x} G(x)) + \frac{1}{x} f(x) = -\frac{1}{x} F(x) + \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. D'où le résultat.
- Soit $x > 0$. Alors $0 \leq t \leq x \Rightarrow \sqrt{1+t^4} \leq \sqrt{1+x^4} \Rightarrow f(t) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et par intégration $(x > 0), G(x) \geq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dt = x \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ d'où $F(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. On en déduit que $F'(x) = \frac{1}{x} (-F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}) \leq 0$ donc F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (a) $t = \frac{1}{z}; dt = -\frac{1}{z^2} dz; h(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = \int_1^{1/x} \frac{-1}{z^2} \frac{dz}{\sqrt{1+(1/z)^4}} = \int_1^{1/x} \frac{-dz}{\sqrt{z^4(1+(1/z)^4)}} = \int_1^{1/x} \frac{-dz}{\sqrt{z^4+1}} = -h(1/x)$.
(b) D'où $xF(x) + \frac{1}{x} F(\frac{1}{x}) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{1/x} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + h(x) + \int_0^1 f(t) dt + h(\frac{1}{x})$ [Relation de Chasles] $= 2F(1) + 0$.
(c) Par b) $F(x) = \frac{1}{x} [2F(1) - \frac{1}{x} F(\frac{1}{x})] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(1/x) = \lim_{y \rightarrow 0} F(y) = 1$ par 4.
(d) Par c) en $+\infty, F(x) \rightarrow 0$ d'où par 6. $F'(x) = \frac{1}{x} [-F(x) + f(x)] \rightarrow 0$.
- Par parité de $F, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Exercice 2:

- Sur $]0, +\infty[$ blabla. En $0^+ : x + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ d'où $-(x + \frac{1}{x}) \rightarrow -\infty$ et pour $x \neq 0, f_1(x) \rightarrow 0 = f_1(0)$.
- Sur $]0, +\infty[$ blabla. En $0^+ : \text{pour } x \neq 0, \frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = e^{-x} [\frac{1}{x} e^{-1/x}] \rightarrow 1 \times 0 \in \mathbb{R}$ car d'après les croissances comparées, en posant $y = 1/x, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y} = 0$ d'où f_1 dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$.
- Formule sur l'exponentielle : pour $x > 0, f_n(x) = (f_1(x))^n$. Encore vrai en 0 (puisque $n \in \mathbb{N}^*$). D'où $f_n = (f_1)^n$.
- Sur $]0, +\infty[, f_n$ est dérivable et $f_n'(x) = -n(1 - \frac{x^2}{x^2}) e^{-n(x+1/x)} = -n \frac{x^2-1}{x^2} e^{-n(x+1/x)}$. f_n admet un maximum en 1 de valeur $f_n(1) = e^{-2n}$. (Ou passer par $f_n = (f_1)^n$ d'où $f_n' = n f_1'(f_1)^{n-1} \dots$) En $+\infty : f_n(x) \rightarrow 0$.
- Remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = [f_1(x)]^n (f_1(x) - 1) \leq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f_1(x) \leq e^{-2} \leq 1$.
- a) Poser pour $x \in \mathbb{R}_+, g_n(x) = f_n(x) - \frac{1}{n}(x-1)$. Alors g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n'(x) = f_n'(x) - \frac{1}{n}$. Mais sur $[0, 1[, \text{signe de } g_n' ?$ Or $\forall x \in]0, 1[, g_n(x) > 0$ puisque $f_n(x) \geq 0$ et $(x-1) < 0$ d'où $-\frac{1}{n}(x-1) > 0$: pas de solution. Sur $[1, +\infty[, g_n'(x) = f_n'(x) - \frac{1}{n} \leq 0 - \frac{1}{n} < 0$. D'où g_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g_n([1, +\infty[) =]-\infty, e^{-2n}]$. Comme $0 \in]-\infty, e^{-2n}]$, il existe une unique solution $v_n \in [1, +\infty[$ à l'équation $g_n(x) = 0$.
b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{n}(v_n - 1) = f_n(v_n) \leq e^{-2n}$ d'où $0 \leq v_n - 1 \leq n e^{-2n}$. Th. d'encadrement $v_n - 1 \rightarrow 0$ d'où $v_n \rightarrow 1$.
- Par 4. et 5. on a que pour tout $x \in [0, 1], 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ d'où par intégration $(0 < 1), 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.
- $\forall x \in]0, 1], x + \frac{1}{x} \geq x$ d'où $-n(x + 1/x) \leq -nx$ et par croissance de l'exp : $f_n(x) \leq e^{-nx}$. Encore vrai pour $x = 0$ puisque $f_n(0) = 0 \leq 1 = e^{-n \times 0}$.
- Par intégration $(0 < 1), I_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx = [\frac{e^{-nx}}{-n}]_0^1 = \frac{1-e^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Théorème d'encadrement : (I_n) converge vers 0.

Exercice 3:

1. A est une matrice de taille 2 et $1 \times 1 - (-1)(-1) = 0$ donc A n'est pas inversible.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ c-a & -c+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases}$.
D'où $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(I, J)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et (I, J) en est une famille génératrice. Il reste à montrer qu'elle est libre : soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 I + \lambda_2 J = 0$. Alors ...
3. Soit $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $f(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) + (\lambda X + Y)A = \lambda AX + AY + \lambda XA + YA = \lambda(AX + XA) + (AY + YA) = \lambda f(X) + f(Y)$. Donc f est une application linéaire donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $f(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-b-c & -a+2b-d \\ -a+2c-d & -b-c+2d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = b = c = d$ (pivot de gauss obligatoire!) d'où $\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} d & d \\ d & d \end{pmatrix}, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Cette matrice engendre le noyau, et comme elle est non nulle, c'est une base du noyau.
5. Soit : $\text{Im } f = \text{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22})) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{matrice "pivot"}}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$
 $= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\right)$.
On vérifie (après suppression de la 4e matrice), que les 3 autres forment une famille libre donc une base de l'image.
Soit poser $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et regarder à quelles conditions sur (x, y, z, t) , le système $f(X) = M$ est compatible ...
6. Par 4., f n'est pas injective ($\text{Ker } f \neq \{0\}$) et par 5. f n'est pas surjective. ($\text{Im } f \subsetneq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Exercice 4:

1. `x=a; .....; if rand()>x/(a+b) then, x=x+1 end;`
2. (a) `a=input(...), b=input(...), x=a, y=0, i=0;`
`while y=0, i=i+1, if rand()>x/(a+b) then, x=x+1, else y=i, end; end; disp(y)`
(b) Une boule blanche peut être obtenue dès le premier tirage, mais on peut aussi obtenir plusieurs noires avant la première blanche : toutefois au vu de l'expérience on ne peut tirer qu'au maximum b noires (puisqu'elles sont remplacées) donc au plus tard, on obtient une blanche au tirage $b+1$: $Y(\Omega) = [1, b+1]$
(c) On introduit les événements B_i, N_i pour $i \in [1, b+1]$ "obtenir une boule blanche (noire) au i^{e} tirage". Alors $(Y=1) = B_1$, et plus généralement pour $k \in [1, b+1]$, $(Y=k) = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$ et d'après la formule des probabilités composées $P(Y=k) = P(N_1) \times \dots \times P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1}) P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k)$
 $= \frac{b}{a+b} \frac{b-1}{a+b} \times \dots \times \frac{b-(k-2)}{a+b} \times \frac{a+(k-1)}{a+b}$ (justifier que chaque tirage se fait en situation équiprobable et que le nombre de boules dans l'urne ne varie pas au cours du temps : $a+b$...)
(d) D'après la question précédente : $P(Y=b+1) = \frac{b}{a+b} \frac{b-1}{a+b} \times \dots \times \frac{1}{a+b} \times \frac{a+b}{a+b} = \frac{b!}{(a+b)^b} \times 1$
et pour $k \in [1, b]$, $P(Y=k) = \frac{1}{(a+b)^k} \frac{b!}{(b-k+1)!} (a+k-1)$. Or $\frac{b!}{(b-(k-1))!(a+b)^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!(a+b)^k}$
 $= \frac{b!}{(a+b)^{k-1}(b-k)!} \left[\frac{1}{b-k+1} - \frac{1}{a+b} \right] = \frac{b!}{(a+b)^{k-1}(b-k)!} \left[\frac{a+b-(b-k+1)}{(b-k+1)(a+b)} \right] = \frac{b!}{(a+b)^{k-1}(b-k)!} \frac{a+k-1}{(b-k+1)(a+b)} = P(Y=k)$.
(e) $\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=1}^M k a_{k-1} - \sum_{k=1}^M k a_k = \sum_{j=0}^{M-1} (j+1) a_j - \sum_{k=1}^M k a_k = \sum_{j=0}^{M-1} j a_j - \sum_{k=1}^M k a_k + \sum_{j=0}^{M-1} a_j = 0 - M a_M + \sum_{j=0}^{M-1} a_j$.
(f) $E(Y) = \sum_{k=1}^{b+1} k P(Y=k) = \sum_{k=1}^b k \left[\frac{b!}{(b-(k-1))!(a+b)^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!(a+b)^k} \right] + (b+1) \frac{b!}{(a+b)^b}$ et d'après e)
 $= \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!(a+b)^k} \right) - b \frac{b!}{(b-b)!(a+b)^b} + (b+1) \frac{b!}{(a+b)^b} = \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!(a+b)^k} \right) + \frac{b!}{(a+b)^b} = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b-k)!(a+b)^k}$
3. (a) $p_{n,0} = P(X_n = 0)$ et $(X_n = 0) = B_1 \cap \dots \cap B_n$ et d'après la formule des probabilités composées, $p_{n,0} = P(B_1) \times \dots \times P_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n$ car l'urne n'est pas modifiée lorsque l'on tire une boule blanche.
 $p_{n,n} = P(X_n = n) = P(N_1 \cap \dots \cap N_n) = 0$ si $n > b$. Si $n \leq b$, d'après la formule des probabilités composées,
 $p_{n,n} = P(N_1) \times \dots \times P_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) = \frac{b}{a+b} \times \frac{b-1}{a+b} \times \dots \times \frac{b-(n-1)}{a+b}$. De plus, comme $X_n(\Omega) \subset [0, n]$ (il n'y a pas égalité selon que $n > b$ ou $n \leq b$), $\sum_{k=0}^n p_{n,k} = \sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$.
(b) $X_n = k$ càd en n tirages on a eu k boules noires ssi en $n-1$ tirages on a déjà eu les k boules noires et on pioche alors une blanche ou en $n-1$ tirages on a seulement eu $k-1$ boules noires et alors on pioche une noire.
D'où $(X_n = k) = [(X_{n-1} = k) \cap B_n] \cup [(X_{n-1} = k-1) \cap N_n]$ et
 $p_{n,k} = p_{n-1,k} P_{(X_{n-1}=k)}(B_n) + p_{n-1,k-1} P_{(X_{n-1}=k-1)}(N_n) = p_{n-1,k} \frac{a+k}{a+b} + p_{n-1,k-1} \frac{b-(k-1)}{a+b}$ d'où le résultat.
(c) $(a+b)E(X_n) = (a+b) \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^n k(a+b) p_{n,k} = 0 + \sum_{k=1}^n k(a+k) p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n k(b+1-k) p_{n-1,k-1}$
puis dans la 2e somme changer d'indice : $j = k-1$, avant de les réunir en mettant le $p_{n-1,k}$ en facteur.
Pour la fin de l'énoncé (et le corrigé) cf le site de Mr Cossutta.