

Exercice 2: inspiré d'Ecricome S 2007

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-1)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est bien une densité de variable aléatoire.
On considère dorénavant une variable aléatoire X de densité f .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. On pose $Z = X - 1$. Reconnaître la loi de Z .
4. Simulation :
 - (a) Soit U une variable de loi uniforme sur $[0, 1[$. Rappeler la fonction de répartition de U .
 - (b) Déterminer la loi de la variable $V = -\frac{1}{2} \ln(1 - U)$.
 - (c) En déduire, à l'aide de la syntaxe `rand()`, un programme scilab simulant X .

Exercice 3: inspiré d'Hec E 87 - Edhec S 97**Partie 1**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n et on considère l'application f qui à tout élément P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = (X - 1)P'(X) - P(X)$$

1. Montrer que f définit un endomorphisme de E .
2. Calculer pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(X^k)$.
3. Ecrire la matrice associée à f dans la base canonique de E .
4. f est-elle bijective ?
5. Déterminer le rang de f . En déduire $\text{Ker}(f)$.
6. On considère l'application $f^2 = f \circ f$.
 - (a) Pour tout élément P de E , exprimer $f^2(P)$, en fonction de P'' et de $f(P)$.
 - (b) Quel est le rang de f^2 ?

Partie 2

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x/\lambda}$. Vérifier que $f \in E$ et déterminer $\Delta(f)$.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
3. a) Vérifier que, pour toute fonction f de E , $\Delta(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.
b) Δ est-elle surjective ?
4. Montrer que Δ est injective.

On dit qu'un réel λ est valeur propre de Δ si il existe une fonction f non nulle de E telle que $\Delta(f) = \lambda f$.

5. 0 peut-elle être valeur propre ?
6. On suppose dans cette question que Δ possède une valeur propre $\lambda \neq 0$ et on considère f une fonction non nulle telle que $\Delta(f) = \lambda f$.
 - (a) Montrer que f est dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$.
 - (b) En déduire que la fonction h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)e^{-x/\lambda}$ est constante.
 - (c) Arriver à une contradiction à l'aide de la question 1. Qu'en déduit-on ?
7. Pour toute fonction f de E , on pose $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \Delta(F_{n-1})$.
 - (a) Montrer que F_n est de classe C^{n+1} et que $F_n(0) = 0$.
 - (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$.