

Exercice 3:

Partie 1

- Si $\deg(P) \leq n$, $\deg((X-1)P') = 1 + \deg(P') \leq n$ et par somme, $\deg(f(P)) \leq n$. Il reste à montrer la linéarité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in E$. Alors par linéarité de la dérivation, $f(\lambda P + Q) = (X-1)(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q) = \lambda(X-1)P' + (X-1)Q' - \lambda P - Q = \lambda f(P) + f(Q)$.
- $f(1) = -1$, $f(X) = (X-1) - X = -1$ et plus généralement pour $k \geq 1$, $f(X^k) = k(X-1)X^{k-1} - X^k = (k-1)X^k - kX^{k-1}$.
- La matrice obtenue est triangulaire supérieure, avec un coefficient diagonal nul, donc non inversible. Donc f non bijective. Ou remarquer $f(1) = f(X)$ donc f non injective (donc non bijective).
- $\text{Im}(f) = \text{Vect}(-1, -1, X^2+2X, \dots, (n-1)X^n - X^{n-1}) = \text{Vect}(-1, X^2+2X, \dots, (n-1)X^n - X^{n-1})$. Donc la famille $((-1, X^2+2X, \dots, (n-1)X^n - X^{n-1}))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$ et elle est libre car constituée de n polynômes non-nuls de degré 2 à 2 distincts. D'où $\text{rg}(f) = n$.
Théorème du rang, comme E est de dimension $n+1$: $\dim(\text{Ker}(f)) = n+1 - n = 1$. Or $f(1) = f(X)$ donc $f(1-X) = 0$. Donc le polynôme non-nul $1-X \in \text{Ker}(f)$. On obtient : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1-X) = \{a - aX, a \in \mathbb{R}\}$.
- Pour $P \in E$, $f \circ f(P) = f((X-1)P' - P) = (X-1)((X-1)P' - P)' - ((X-1)P' - P) = (X-1)(P' + (X-1)P'' - P') - f(P) = (X-1)^2 P'' - f(P)$
- $f^2(1) = 1$, $f^2(X) = 1$ et pour $k \geq 2$, $f^2(X^k) = (X-1)^2 k(k-1)X^{k-2} - f(X^k) = (k-1)^2 X^k + \dots$ est de degré k . Donc la famille $(f^2(X), \dots, f^2(X^n))$ est génératrice de $\text{Im}(f^2)$ et est libre (échelonnée en degrés), donc $\text{rg}(f^2) = n$.

Partie 2

- f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f \in E$. Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta(f)(x) = \int_0^x e^{t/\lambda} dt = [\lambda e^{t/\lambda}]_0^x = \lambda(e^{x/\lambda} - 1)$.
- Pour tout $f \in E$, $\Delta(f)$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. En particulier $\Delta(f)$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ donc $\Delta(f) \in E$ et Δ est bien une application de E dans E .
Linéarité : soit $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\Delta(\lambda f + g) = \lambda \Delta(f) + \Delta(g)$. Or par linéarité de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda f + g)(x) = \int_0^x (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = \lambda \Delta(f)(x) + \Delta(g)(x)$.
- a) cf 2 pour la dérivabilité, et comme $\Delta(f)$ est une primitive de f , $(\Delta(f))' = f$.
b) Soit E_1 l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors d'après a), $\text{Im} \Delta \subset E_1$.
Or $E_1 \subsetneq E$, puisque par exemple la valeur absolue est dans E mais non dans E_1 .
D'où $\text{Im}(\Delta) \subsetneq E$ et Δ n'est pas surjective.
- On sait que la fonction nulle O_E est dans $\text{Ker}(\Delta)$. Montrons que c'est la seule.
Soit $f \in \text{Ker}(\Delta)$. Alors $\Delta(f) = O_E$, et la dérivée de la fonction nulle étant nulle on obtient $(\Delta(f))' = 0_E$ c-à-d $f = 0_E$, puisque $\Delta(f)' = f$. Donc $\text{Ker}(\Delta) = \{0\}$ et Δ est injective.
- Si 0 était valeur propre, il existerait une fonction non-nulle f telle que $\Delta(f) = 0 * f = 0$ Donc $f \in \text{Ker}(\Delta)$. D'après 4, une telle fonction n'existe pas. Donc 0 n'est pas valeur propre.
- (a) $\Delta(f) = \lambda f$ implique que $f = \frac{1}{\lambda} \Delta(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque $\Delta(f)$ l'est) et par dérivation $f' = \frac{1}{\lambda} f$ (puisque $(\Delta(f))' = f$).
(b) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de 2 fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x)e^{-x/\lambda} - f(x)\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda} = e^{-x/\lambda}[f'(x) - \frac{1}{\lambda}f] = e^{-x/\lambda} \times 0 = 0$ et h est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
(c) On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c = f(x)e^{-x/\lambda}$ c-à-d il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ce^{x/\lambda}$. Or d'après 1. (et par linéarité) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta(f)(x) = \lambda c(e^{x/\lambda} - 1) = \lambda f(x) - \lambda c \neq \lambda f(x)$, puisque f non-nulle donc $c \neq 0$. Contradiction : λ ne peut pas être valeur propre de Δ . Et finalement, avec 5., on en déduit que Δ n'admet aucune valeur propre.
- (a) Par récurrence : F_0 est dérivable de dérivée f continue donc F_0 de classe C^1 .
De plus $F_0(0) = \Delta(f)(0) = 0$ (unique primitive qui s'annule en 0...)
Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, F_{n-1} est de classe C^n . Alors comme $F_n = \Delta(F_{n-1})$ est dérivable de dérivée F_{n-1} de classe C^n , on en déduit bien que F_n est de classe C^{n+1} . Enfin, comme $\Delta(F_{n-1})$ est l'unique primitive de F_{n-1} qui s'annule en 0, $F_n(0) = 0$. Conclure.
(b) Formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction F_n de classe C^{n+1} à l'ordre n entre 0 et x .
 $F_n(x) = F_n(0) + F_n'(0)x + \frac{F_n''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{F_n^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_n^{(n+1)}(t) dt$. Or comme l'opérateur Δ primitive, on a $F_n' = F_{n-1}$ d'où $F_n'' = F_{n-2}$ et ainsi de suite, jusqu'à $F_n^{(n)} = F_0$ et enfin $F_n^{(n+1)} = F_0' = f$. Comme en 0, toutes les dérivées sont nulles, on obtient $F_n(x) = 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_n^{(n+1)}(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$