Devoir sur feuille 4
le 12/03/2016

Question : `Ast1 2004`

Soit u la suite définie par $u_0 = 1/2$ et par la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^3$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
2. Montrer que la suite u converge vers 0 en décroissant.
3. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^3$ est convergente et déterminer la valeur de sa somme.
4. Montrer que u_{n+1} est équivalent à u_n lorsque $n \to +\infty$.
5. Montrer alors que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est équivalent à u_n en $+\infty$.
6. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.
7. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ converge.
   On pourra étudier les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, où $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles

Exercice 1: `Esc S 98 adapté`

Question préliminaire :

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n s'écrit sous la forme $M^n = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - a_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - a_n & \frac{1}{4} & a_n \end{pmatrix}$ où a_n sera exprimé en fonction de n.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0,1[$.On dispose de N boules numérotées de 1 à N, réparties dans deux urnes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : On choisit au hasard un entier entre 1 et N, puis si ce nombre est k, la boule n°k est changée d'urne avec probabilité a, maintenue dans l'urne qui la contient avec probabilité $1 - a$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules contenues dans l'urne $\mathcal{U}$ après n répétitions de $\mathcal{E}$.

Première partie : Dans cette partie, on suppose qu'au départ toutes les boules sont dans $\mathcal{U}$.

1. Donner les lois de X_0 et X_1, et préciser les espérances et variances.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Simulation informatique :
   (a) Rappeler ce que signifie l'instruction `floor(N*rand())+1`.
   (b) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante, afin qu'elle associe à n une réalisation de la variable aléatoire X_n. On conviendra que la liste u stocke pour chaque boule l'urne où elle se trouve en décidant que l'urne $\mathcal{U}$ est représentée par 1 et l'urne $\mathcal{V}$ par 0.

```
function y=experience(n)
u=ones(1,N);
for i=........
k=........
if ........ then, u(k)=1-u(k) ; end;
end;
y=........; endfunction
```

Deuxième partie : Dans cette partie $N = 2$, $a = \dfrac{1}{2}$ et on suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $\{0,1,2\}$.

1. Exprimer, pour $k \in \{0,1,2\}$ la probabilité $P(X_0 = k)$.
2. Pour $i \in \{0,1,2\}$ et $j \in \{0,1,2\}$, déterminer $P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$, où M est la matrice introduite dans la question préliminaire.
4. Déduire de la question préliminaire, les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2: `Esc S 2000 adapté`

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus 2. Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+1) + XP'(X)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de l'image de f.
3. Déterminer le noyau de f. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
4. On définit les polynômes E_0, E_1 et E_2 par
   $E_0 = 1$; $E_1' = E_0$ et $E_1(1) = 2E_1(0)$; $E_2' = E_1$ et $E_2(1) = 3E_2(0)$
   (a) Expliciter les polynômes E_1 et E_2.
   (b) Montrer que (E_0, E_1, E_2) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans cette base $\mathcal{B}$.
   (c) Calculer les images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, et les écrire dans la base $\mathcal{B}$.
   En déduire sans calcul le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que : $P(X+1) + XP'(X) = X^2 + X + 1$.

Exercice 3: `inspiré d'Agro-Veto 2008`

1. **Étude d'une fonction définie par une intégrale**

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.

   (a) Pour tout réel non nul x, justifier l'existence de l'expression $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Nous définissons alors la fonction g par $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(0) = f(0)$.

   (b) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que g est paire.
   Que peut-on dire de plus sur g si f est impaire ? Le démontrer.

   Nous définissons l'application a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

   (d) Montrer que $g(0) = a(0)$ et que, pour tout réel non nul x, $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$.
   (e) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad xg'(x) + g(x) = a(x)$.
   (f) Dans cette question seulement, $f : x \longmapsto |x|$.
   Pour tout réel x strictement positif puis, pour tout réel x strictement négatif, calculer l'expression de $g(x)$. Montrer alors que g n'est pas dérivable en 0.

2. **Dans le cas où f « diminue les distances »**

   Dans cette question 2., f est une application définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   Nous pouvons alors associer à f la fonction g définie à la question 1, ainsi que la fonction a.

   (b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable que, pour tout réel x : $g(x) = \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u$.
   (c) Montrer que, pour tous réels distincts v et w :$|a(v) - a(w)| < |v - w|$
   puis en déduire que, pour tous réels distincts x et y :$|g(x) - g(y)| < |x - y|$.

3. **Étude d'un endomorphisme de fonctions**

   E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et on introduit la fonction Φ qui, à toute fonction f appartenant à E, associe la fonction g définie à la question 1.

   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
   (b) Φ est-elle injective ? Déterminer alors le noyau de Φ (on pourra utiliser les questions 1. (c) et 1.(e))
   (c) En considérant l'application *sinus* continue et impaire sur $\mathbb{R}$, montrer que Φ n'est pas surjective.
   (d) Soit F le sous-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré au plus 2.
      i. Montrer que si $f \in F$, alors $\Phi(f) \in F$.
      On note dorénavant φ la restriction de Φ à F, qui définit un endomorphisme de F.
      ii. Déterminer une base du noyau de φ ainsi qu'une base de l'image de φ.