

# Eléments de correction du DS 4

## Question :

- Coquille dans l'énoncé : montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]0, 1[$  (car si  $u_n = 1$ , alors  $u_n^3 = 1$  d'où  $u_{n+1} = 0$  : problème!)  
Par récurrence : *hérédité* si  $0 < u_n < 1$  alors  $0 < u_n^3 < u_n < 1$  d'où  $u_{n+1} = u_n - u_n^3 \in ]0, 1[$ .
- $u_{n+1} - u_n = -u_n^3 < 0$  donc  $u$  décroissante et minorée par 0 converge. Soit  $\ell$  sa limite. Par passage à la limite dans la relation de récurrence :  $\ell = \ell - \ell^3 \Leftrightarrow \ell = 0$ .
- $u_n^3 = u_n - u_{n+1}$ , terme général d'une série télescopique. On étudie les sommes partielles :  
$$\sum_{k=0}^n u_k^3 = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$
 Donc la série  $\sum_{n \geq 0} u_n^3$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^3 = \frac{1}{2}$ .
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n - u_n^3}{u_n} = 1 - u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . 5.  $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^3}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{u_n^3}{u_n^2} = u_n$ . Ou poser le quotient.
- La série  $\sum_{n \geq 0} (\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n})$  est télescopique et divergente car  $\sum_{k=0}^n (\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}) = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ , et  $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \geq 0$  (car  $u_{n+1} \leq u_n$ ), et  $u_n \sim \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$  : d'après le critère par équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge.
- Montrons que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$  (suite  $u$  décroissante), et  $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$  et  $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  convergent vers la même limite. On en déduit que la suite  $(S_n)$  converge (vers cette même limite) donc la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$  converge.

## Exercice 1:

### Question préliminaire :

Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $a_n \in \mathbb{R}$  tel que  $M^n$  ait la forme souhaitée.

$n=1$  : au vu de l'expression de  $M$ ,  $a_1 = 1/2$  convient.

*hérédité* : Supposons que  $a_n$  existe, et trouvons un réel  $a_{n+1}$  qui convient.

$$\text{Or } M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - a_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - a_n & \frac{1}{4} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a_n \\ \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a_n & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8} \end{pmatrix} \text{ En posant } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8},$$

on obtient bien la forme voulue puisque  $\frac{1}{2} - a_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a_n$ . Ccl.

Il reste à trouver la forme explicite de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui est une suite arithmético-géométrique : on résout

$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$ . Alors la suite  $(a_n - \frac{1}{4})$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $a_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ .  
D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times (\frac{1}{2})^{n-1}$  (attention la suite part de  $n = 1$ ) soit  $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^{n+1}$ .

### Partie 1 :

- Comme toutes les boules sont dans  $\mathcal{U}$ ,  $X_0$  est la variable certaine  $N$ .  $X_0(\Omega) = \{N\}$ ,  $E(X_0) = N$  et  $V(X_0) = 0$ .  
Quelque soit l'entier choisi, la boule correspondante est dans  $\mathcal{U}$  et elle est déplacée avec probabilité  $a$  d'où  $X_1(\Omega) = \{N-1, N\}$ , et  $P(X_1 = N-1) = a$ . D'où  $E(X_1) = a(N-1) + (1-a)N = N-a$ ,  
 $E(X_1^2) = a(N-1)^2 + (1-a)N^2 = N^2 - 2aN + a$  et  $V(X_1) = E(X_1)^2 - (E(X_1))^2 = a - a^2$ .
- Au plus deux boules peuvent être déplacées d'où  $X_2(\Omega) = \{N-2, N-1, N\}$ . Soit les événements pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $U_i$  "au  $i^{\text{ie}}$  tirage on choisit une boule de l'urne  $\mathcal{U}$ " et  $D_i$  "la boule choisie au  $i^{\text{ie}}$  tirage est déplacée". Alors  
 $(X_2 = N-2) = D_1 \cap (U_2 \cap D_2)$  (l'événement  $U_1$  est certain) d'où  $P(X_2 = N-2) = P(D_1)P_{D_1}(U_2)P_{D_1 \cap U_2}(D_2)$   
 $= a \times \frac{N-1}{N} \times a$ . De même,  $(X_2 = N-1) = [\overline{D_1} \cap D_2] \cup [D_1 \cap \overline{D_2}]$  et  $P(X_2 = N-1) = 2a(1-a)$ .  
On en déduit  $P(X_2 = N) = 1 - a^2 \frac{N-1}{N} - 2a(1-a)$  (ou  $(X_2 = N) = [\overline{D_1} \cap \overline{D_2}] \cup [D_1 \cap \overline{U_2} \cap D_2]$ ).
- `for i=1:n; k=floor(N*rand()+1) // k représente le numéro de la boule choisie : entier entre 1 et N.`  
Il faut décider maintenant si on déplace la boule, et le cas échéant changer la coordonnée  $u(k)$   
`if rand()<a then, u(k)=1-u(k).`  
`y=sum(u)` (pas de else, car si la boule est maintenue dans l'urne, rien ne change)

### Partie 2 :

- $\forall k \in \{0, 1, 2\}, P(X_0 = k) = \frac{1}{3}$ .
- Sachant  $(X_n = 0)$ , les 2 boules sont dans l'urne  $\mathcal{V}$  (donc la boule choisie sera forcément dans cette urne).  
De ce fait,  $X_{n+1} = 1$  ssi la boule est déplacée, et sinon  $X_{n+1} = 0$ . D'où  $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1 - a = \frac{1}{2}$ ,  
 $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = a = \frac{1}{2}$  et  $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$ . Sachant  $(X_n = 1)$ , l'urne  $\mathcal{U}$  contient 1 boule sur les 2,  
donc  $X_{n+1} = 0$  ssi on choisit cette boule, et qu'on la déplace ;  $X_{n+1} = 1$  si on ne déplace pas la boule (peu importe la boule choisie) et  $X_{n+1} = 2$  si on choisit la boule de  $\mathcal{V}$  et qu'on la déplace. D'où  $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}$ ,  
 $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 1 - a = \frac{1}{2}$  et  $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}$ . De même,  $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$ ,  
 $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = a = \frac{1}{2}$ ,  $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 1 - a = \frac{1}{2}$  *remarque* : comme  $a = 1 - a$ , il est plus lisible de rédiger avec  $a$  (resp.  $1 - a$ ), puis de remplacer au dernier moment  $a$  par sa valeur.

3. On applique trois fois la formule des probabilités totales au s.c.e.  $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$  :  
 $P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0)$   
 $= \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{4}P(X_n = 1) + 0$ . De même,  $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2)$  et  
 $P(X_{n+1} = 2) = 0P(X_n = 0) + \frac{1}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2)$ .
4. On reconnaît une suite géométrique de matrices :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = M^n U_0 = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - a_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - a_n & \frac{1}{4} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$  d'où  
 $P(X_n = 0) = \frac{1}{3}(a_n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - a_n) = \frac{1}{4}$ , et de même  $P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$  et  $P(X_n = 2) = \frac{1}{4}$ .  
Vérifier que la somme fait bien 1 et remarquer que les probabilités sont constantes...

### Exercice 2 :

1. Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  :  $P$  s'écrit  $P(X) = aX^2 + bX + c$ , d'où  $P(X+1) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c$  et  $\deg(P(X+1)) \leq \deg(X+1)^2 = 2$ . Comme de plus  $\deg(XP') = 1 + \deg(P') \leq 2$ , on obtient bien  $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ . Il reste à montrer la linéarité de  $f$  : soit  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(\lambda P_1 + P_2)(X) = (\lambda P_1 + P_2)(X+1) + X(\lambda P_1 + P_2)'(X) = \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) + \lambda X P_1'(X) + X P_2'(X) = \lambda f(P_1)(X) + f(P_2)(X)$ .
2.  $Im(f) = Vect(f(1), f(X), f(X^2)) = Vect(1, 2X+1, 3X^2+2X+1)$  : famille génératrice de polynômes échelonnés en degré donc libre. Ou  $Im(f) = Vect(1, 2X+1, 3X^2) = \dots = Vect(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$  puis choisir la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  comme base de  $Im(f)$ . En particulier,  $f$  est surjective.
3. Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  :  $P$  s'écrit  $P(X) = aX^2 + bX + c$  et  $f(P)(X) = 3aX^2 + (2a+2b)X + (a+b+c)$ . D'où  
 $P \in Ker f \Leftrightarrow f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 0 \\ 2a+2b = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$ . On en déduit  $Ker f = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$  et  $f$  injective.  
D'où  $f$  automorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
4. (a)  $E'_1(X) = 1$  d'où  $\exists b \in \mathbb{R}$  tel que  $E_1(X) = X + b$ .  $E_1(1) = 2E_1(0) \Leftrightarrow 1 + b = 2b \Leftrightarrow b = 1$  et finalement,  $E_1(X) = X + 1$ . De même,  $E_2(X) = \frac{1}{2}X^2 + X + \frac{3}{4}$ .
- (b) Soit  $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ . Montrons qu'il existe un unique triplet  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 = P$  càd tel que  $\frac{1}{2}\alpha_2 X^2 + (\alpha_2 + \alpha_1)X + (\alpha_2 \frac{3}{4} + \alpha_1 + \alpha_0) = aX^2 + bX + c$ . Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on obtient :  $\begin{cases} \alpha_2 = 2a \\ \alpha_1 = b - 2a \\ \alpha_0 = c - b + \frac{1}{2}a \end{cases}$  Unique solution donc la famille  $\mathcal{B}$  est bien une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . En particulier avec le polynôme  $Q(X) = X^2 + X + 1$ ,  $a = b = c = 1$  d'où  $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = -1$  et  $\alpha_2 = 2$  :  $Q = \frac{1}{2}E_0 - E_1 + 2E_2$ .
- (c) On utilise 2. et la linéarité de  $f$  :  $f(E_0) = 1 = E_0$ ;  $f(E_1) = f(X) + f(1) = 2X + 1 + 1 = 2E_1$  et  $f(E_2) = \frac{1}{2}f(X^2) + f(X) + \frac{3}{4}f(1) = \frac{1}{2}(3X^2 + 2X + 1) + 2X + 1 + \frac{3}{4} = 3E_2$ .  
On cherche  $P$  tel que  $f(P) = Q$  càd tel que  $f(P) = \frac{1}{2}E_0 - E_1 + 2E_2$ . Au vu des images calculées, on devine  $P = \frac{1}{2}E_0 - \frac{1}{2}E_1 + \frac{2}{3}E_2$  car alors  $f(P) = \frac{1}{2}f(E_0) - \frac{1}{2}f(E_1) + \frac{2}{3}f(E_2) = \frac{1}{2}E_0 - E_1 + 2E_2 = Q$ .

### Exercice 3 :

1. (a)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur tout  $[-x, x]$ , avec  $x \in \mathbb{R}$  donc l'intégrale  $\int_{-x}^x f(t)dt$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Alors pour tout  $x \neq 0$ ,  $g(x) = \frac{1}{2x}(F(x) - F(-x))$ . Comme  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (même  $C^1$  car primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ ), on en déduit que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .  
Continuité en 0 : comme  $F$  est dérivable en 0, on obtient  $g(x) = \frac{1}{2}[\frac{F(x)-F(0)}{x-0} + \frac{F(-x)-F(0)}{-x-0}] \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}[F'(0) + F'(0)] = F'(0) = f(0) = g(0)$ . D'où  $g$  continue en 0.
- (c)  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  :  $g(-0) = g(0)$ , puis pour  $x \neq 0$ ,  $-x \neq 0$  et  $g(-x) = \frac{1}{-2x} \int_x^{-x} f(t)dt = \frac{-1}{2x} \int_{-x}^x f(t)dt = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t)dt = g(x)$ .  
Supposons  $f$  impaire, montrons que  $g$  est la fonction nulle : si  $f$  est impaire alors  $f(0) = 0$  d'où  $g(0) = 0$ .  
Puis pour  $x \neq 0$ ,  $g(x) = \frac{1}{2x}[\int_{-x}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt] = \frac{1}{2x}[\int_x^0 f(-u)(-du) + \int_0^x f(t)dt] = \frac{1}{2x}[-\int_0^x f(u)du + \int_0^x f(t)dt] = 0$ . (en ayant posé  $u = -t$ ).
- (d)  $a(0) = \frac{f(0)+f(-0)}{2} = f(0) = g(0)$  et pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{1}{x} \int_0^x a(t)dt = \frac{1}{2x}[\int_0^x f(t)dt + \int_0^x f(-t)dt] = \frac{1}{2x}[\int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(u)(-du)] = \frac{1}{2x}[\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(u)du] = g(x)$ .
- (e) comme  $a$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (somme et composée de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ),  $A : x \mapsto \int_0^x a(t)dt$  est l'unique primitive de  $a$  qui s'annule en 0. En particulier,  $A$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , d'où par produit  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  (puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}A(x)$ ). De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = -\frac{1}{x^2}A(x) + \frac{1}{x}A'(x)$  càd  $xg'(x) = -\frac{1}{x}A(x) + a(x)$  soit encore  $xg'(x) + g(x) = a(x)$ .  
Ou via l'expression en  $F$ , mais calculs plus longs.
- (f) Attention, prendre la dernière forme trouvée de  $g$ , pas la définition ! (calculs beaucoup plus difficiles car sur  $[-x, x]$  le signe de  $t$  change, même si  $x > 0$ ).  
Pour  $x > 0$ ,  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|t|+|-t|}{2} dt = \frac{1}{x} \int_0^x t dt = \frac{1}{x} [\frac{1}{2}t^2]_0^x = \frac{1}{2}x$  et pour  $x < 0$ ,  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{|t|+|-t|}{2} dt =$

$\frac{1}{x} \int_0^x -t dt = -\frac{1}{2}x$  et pour  $x = 0$ ,  $g(0) = 0$ . D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}|x|$  donc n'est pas dérivable en 0 (est dérivable à droite en 0 avec  $g'_d(0) = \frac{1}{2}$  et dérivable à gauche en 0 avec  $g'_g(0) = -\frac{1}{2} \neq g'_d(0)$ )

2. (a) Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors pour  $x \neq x_0$ ,  $|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  d'où par encadrement,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ .
- (b) Pour  $x = 0$  :  $\int_0^1 a(0) du = a(0)[u]_0^1 = a(0) = g(0)$ . Puis pour  $x \neq 0$ , posons  $t = ux$  alors  $dt = x du$  et les bornes deviennent :  $u = 0 \Rightarrow t = 0$  et  $u = 1 \Rightarrow t = x$  d'où  $\int_0^1 a(ux) du = \int_0^x a(t) \frac{dt}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x a(t) dt = g(x)$  (ou dans l'autre sens, poser  $u = \frac{t}{x}$ ).
- (c) Pour  $v \neq w$ ,  $|a(v) - a(w)| = \frac{1}{2}|f(v) + f(-v) - f(w) - f(-w)| = \frac{1}{2}|f(v) - f(w) + f(-v) - f(-w)|$   
 $\leq \frac{1}{2}(|f(v) - f(w)| + |f(-v) - f(-w)|)$  (inégalité triangulaire)  
 $< \frac{1}{2}(|v - w| + |-v - (-w)|)$  (hyp sur  $f$ )  $= \frac{1}{2}(|v - w| + |v - w|) = |v - w|$ .  
D'où  $|g(x) - g(y)| = |\int_0^1 (a(xu) - a(yu)) du| \leq \int_0^1 |a(xu) - a(yu)| du$  (inégalité triangulaire, car  $0 \leq 1$ )  
 $< \int_0^1 |xu - yu| du$  (car  $0 < 1$  et pour tout  $u \in ]0, 1]$ ,  $xu \neq yu$  donc on peut utiliser ce qui précède)  
 $= \int_0^1 u|x - y| du = |x - y| \int_0^1 u du = |x - y| [\frac{1}{2}u^2]_0^1 = \frac{1}{2}|x - y| < |x - y|$ .
3. (a) Dans la question 1., on a montré que si  $f$  était continue sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction  $g$  correspondante l'était aussi : donc si  $f \in E$ ,  $\Phi(f) \in E$ .  
Il reste à montrer la linéarité : soit  $f_1, f_2 \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $\Phi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$ .  
En  $x = 0$  :  $\Phi(\lambda f_1 + f_2)(0) = \lambda f_1(0) + f_2(0)$  (par définition)  $= \lambda \Phi(f_1)(0) + \Phi(f_2)(0)$ .  
Puis pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\Phi(\lambda f_1 + f_2)(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \lambda f_1(t) + f_2(t) dt = \frac{1}{2x} [\lambda \int_{-x}^x f_1(t) dt + \int_{-x}^x f_2(t) dt]$  par linéarité de l'intégrale  $= \lambda \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f_1(t) dt + \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f_2(t) dt = \lambda \Phi(f_1)(x) + \Phi(f_2)(x)$ .
- (b) On a montré en 1. f) que si  $f$  est impaire alors  $\Phi(f) = 0$  donc  $\{\text{fonctions continues impaires}\} \subset \text{Ker}(\Phi)$ , et  $\Phi$  non injective. Montrons l'inclusion réciproque : soit  $f \in \text{Ker}(\Phi)$ , et posons  $g = \Phi(f)$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \Phi(f)(x) = 0$ . En particulier,  $f(0) = g(0) = 0$ . Et pour tout  $x \neq 0$ ,  $a(x) = xg'(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$  via 1.(e) (puisque  $g$  étant la fonction nulle,  $g'$  l'est aussi). D'où  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ . On obtient bien que  $f$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ .
- (c) D'après 1.(c), pour toute fonction  $f$  continue, la fonction  $g$  est continue et paire. D'où  $\text{Im}(\Phi) \subset \{\text{fonctions continues paires}\}$ . En particulier la fonction *sinus* n'a pas d'antécédents, donc  $\Phi$  n'est pas surjective.
- (d) i) Posons  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  et  $g = \Phi(f)$ . Alors  $g(0) = f(0) = c$   
et pour  $x \neq 0$ ,  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) + f(-t)) dt = \frac{1}{x} \int_0^x (2at^2 + c) dt = \frac{1}{x} [\frac{2}{3}at^3 + ct]_0^x = \frac{2}{3}ax^2 + c$ .  
Finalement, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{2}{3}ax^2 + c$  d'où  $g = \Phi(f) \in F$ .  
ii) D'après le calcul précédent,  $\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$  et  $\text{Ker}(\varphi) = \{x \mapsto bx, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto x)$ , famille libre car un seul vecteur non nul. Puis  $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(x \mapsto 1), \varphi(x \mapsto x), \varphi(x \mapsto x^2))$   
 $= \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto 0, x \mapsto \frac{2}{3}x^2) = \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x^2)$  (famille libre, car échelonnée en degrés)