

DEVOIR LIBRE 5

Exo I.

1. Montrer que les deux applications suivantes ne sont pas injectives :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \vartheta & \mapsto & e^{i\vartheta} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \Im m(z) \end{array}$$

2. Montrer que les trois applications suivantes ne sont pas surjectives :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |z| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 4x \end{array}$$

Exo II. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$.

1. Étudier la fonction f : domaine de définition, limites, variations.
2. f est-elle injective de $] - 2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$?
3. f est-elle surjective de $] - 2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$?
4. On définit la restriction de f à $\mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \frac{3x^2}{x+2} \end{array}$$

Par la méthode de résolution d'équation, montrer que g définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer g^{-1} .

5. Retrouver le résultat sur la bijection de g en utilisant le théorème de la bijection.

Exo III. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$. Calculer $f^{-1}([0,1])$, $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ puis $f(]-1,1[)$, $f(]1,+\infty[)$ et $f(]-2,0] \setminus \{-1\})$.

Exo IV.

1. Pour $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$, calculer $f^{-1}(\{1\})$.
2. Pour $\begin{array}{ccc} g : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \arg(z) \end{array}$, calculer $g(\mathbb{R}^*)$, $g(i\mathbb{R}^*)$, $g(\mathbb{R}_*^-)$ et $g(i\mathbb{R}_*^+)$.
3. Pour $\begin{array}{ccc} h : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & \frac{z+1}{z-1} \end{array}$, montrer que $h(\mathbb{U}) \subset i\mathbb{R}$.

Exo V. Soient A, B, C, D des ensembles et $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$ des applications. Montrer que

1. $g \circ f$ injective implique f injective.
2. $g \circ f$ surjective implique g surjective.
3. $h \circ g$ et $g \circ f$ bijectives ssi h, g et f bijectives.

Exo VI. Soient E, F deux ensembles, soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Pour $A \subset B \subset F$, prouver que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. Pour $A \subset F$ et $B \subset F$, prouver que

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

3. Pour $A \subset F$, prouver que $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

CORRECTION DU DEVOIR LIBRE 5

Exo I.

1. f n'est pas injective car $f(0) = e^0 = 1 = e^{2i\pi} = f(2\pi)$.
 g n'est pas injective car $g(0) = \Im m(0) = 0 = \Im m(i) = g(i)$.
2. f n'est pas surjective car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \neq \mathbb{C}$.
 g n'est pas surjective car $g(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$.
 h n'est pas surjective car $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4 \geq -4$ de sorte que $h(\mathbb{R}) \subset [-4, +\infty[$ et donc $h(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.

Exo II. 1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sa dérivée, qui vaut

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x}{(x+2)^2} = 3x \frac{x+4}{(x+2)^2},$$

est du signe de $x(x+4)$. Par ailleurs, un calcul rapide montre que $f \xrightarrow{-\infty} -\infty$, $f \xrightarrow{-2^-} -\infty$, $f \xrightarrow{-2^+} +\infty$ et $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$. En particulier, la tableau de variation de la fonction f est

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	12 $\nearrow$ $-\infty$			$+\infty$ $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$		

2. Il résulte du tableau de variation (et du théorème des valeurs intermédiaires) que l'équation $f(x) = 1$ a deux antécédents : l'un dans $] -2, 0[$ et l'autre dans $]0, +\infty[$. A fortiori, f n'est pas injective sur $] -2, +\infty[$.
3. De même, il résulte du tableau de variation que $f(] -2, +\infty[) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$. A fortiori, f n'est pas une surjection de $] -2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Etant donné $y \in \mathbb{R}^+$, nous remarquons d'une part que $y - \sqrt{24y + y^2} < 0$ et d'autre part qu'un nombre positif x satisfait

$$\begin{aligned}
 y = g(x) &\iff y = \frac{3x^2}{x+2} \iff 3x^2 = y(x+2) \iff x^2 - \frac{y}{3}x - \frac{2y}{3} = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{y}{6}\right)^2 x - \frac{24y+y^2}{6^2} = 0 \iff \left(x - \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6}\right) \left(x - \frac{y-\sqrt{24y+y^2}}{6}\right) = 0 \\
 &\iff x = \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6} \geq 0
 \end{aligned}$$

En particulier, l'équation $y = g(x)$ admet une unique solution $x \geq 0$ de sorte que g est une bijection. De plus, sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned}
 g^{-1} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\
 y &\mapsto \frac{y+\sqrt{24y+y^2}}{6}
 \end{aligned}$$

5. D'après le tableau de variation de f , la fonction g est strictement croissante (et donc injective) et satisfait $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. A fortiori, g est bijective.

Exo III. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}\frac{3x}{1-x^2} = 1 &\iff 1 - x^2 = 3x \iff x^2 + 3x - 1 = 0 \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0 \iff \left(x + \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) \left(x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \\ &\iff x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} =: x_0 \text{ ou } x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} =: x_1\end{aligned}$$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ de dérivée positive car

$$f'(x) = \frac{3(1-x^2) + 6x^2}{(1-x^2)^2} = 3 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \geq 0 \quad (|x| \neq 1)$$

Nous obtenons le tableau de variation suivant pour f

x	$-\infty$	x_0	-2	-1	0	x_1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+				+			+
$f(x)$	$0 \nearrow 1 \nearrow 2 \nearrow +\infty$				$-\infty \nearrow 0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow 0$

A fortiori, nous obtenons que $f^{-1}([0, 1]) =]-\infty, x_0] \cup [0, x_1]$, $f^{-1}(\mathbb{R}^+) =]-\infty, -1[\cup [0, 1[$ puis $f(]-1, 1[) = \mathbb{R}$, $f(]1, +\infty[) =]-\infty, 0[$ et $f(]-2, 0[\setminus \{-1\}) =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$. Il est également possible de trouver que $f^{-1}([0, 1]) =]-\infty, x_0] \cup [0, x_1]$, $f^{-1}(\mathbb{R}^+) =]-\infty, -1[\cup [0, 1[$ en résolvant les inégalités $0 \leq f(x) \leq 1$ et $f(x) \geq 0$.

Exo IV. 1. Nous avons $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{U}$ car

$$z \in f^{-1}(\{1\}) \iff f(z) \in \{1\} \iff f(z) = 1 \iff |z| = 1 \iff z \in \mathbb{U}.$$

2. Si l'on considère que la fonction argument dont il est question (on a le choix) est à valeurs dans $[0, 2\pi[$, on obtient

$$g(\mathbb{R}^*) = \{0, \pi\}, \quad g(i\mathbb{R}^*) = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}, \quad g(\mathbb{R}_*^-) = \{\pi\} \quad \text{et} \quad g(i\mathbb{R}_*^+) = \{0\}.$$

La réponse sera différente (la question étant mal posée) si vous avez pris votre argument à valeurs dans $[-\pi, \pi[$ ou à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, etc...

3. Soit $z \in h(\mathbb{U})$. Alors il existe $u \in \mathbb{U}$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$ tel que $z = h(u)$ et $u = e^{i\vartheta}$. A fortiori, nous obtenons que

$$z = h(u) = \frac{e^{i\vartheta} + 1}{e^{i\vartheta} - 1} = \frac{e^{i\vartheta/2} + e^{-i\vartheta/2}}{e^{i\vartheta/2} - e^{-i\vartheta/2}} = \frac{2 \cos(\vartheta/2)}{2i \sin(\vartheta/2)} = -i \cotan \frac{\vartheta}{2} \in i\mathbb{R}.$$

En conclusion, nous avons donc que $h(\mathbb{U}) \subset i\mathbb{R}$.

Exo V.

1. Supposons $g \circ f$ injective. Alors, étant donnés x et x' dans A tels que $f(x) = f(x')$, nous avons $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ et comme $g \circ f$ injective est injective, il suit $x = x'$. En conclusion, f est une injection de A dans B .
2. Supposons $g \circ f$ est surjective. Alors pour $y \in C$, il existe $x \in A$ tel que $y = g \circ f(x)$ et alors on a $y = g(x')$ pour $x' := f(x) \in B$. En particulier, g est une surjection de B dans C .
3. Si h , g et f sont bijectives, leurs composées $h \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives. Réciproquement, si $h \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors on déduit du résultat de la question 1 et de l'injectivité de $h \circ g$ que g est injective. De même, on déduit de on déduit du résultat de la question 2 et de la surjectivité de $g \circ f$ que g est surjective. En particulier, g est bijective et les applications $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ et $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ le sont alors également en tant que composées de bijections.

Exo VI. 1. Pour $x \in f^{-1}(A)$, on a $y = f(x) \in A$. Comme $A \subset B$, on a $y = f(x) \in B$ et donc $x \in f^{-1}(B)$. En conclusion, on a bien $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

2.

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \\
 &\iff f(x) \in A \cup B \iff x \in f^{-1}(A \cup B) \\
 x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \\
 &\iff f(x) \in A \cap B \iff x \in f^{-1}(A \cap B)
 \end{aligned}$$

A fortiori, on a $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$ et $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

3. De même, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(F \setminus A) &\iff f(x) \in F \setminus A \iff f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin A \iff x \in f^{-1}(F) = E \text{ et } x \notin f^{-1}(A) \\
 &\iff f(x) \in E \setminus f^{-1}(A)
 \end{aligned}$$

En particulier, nous avons $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.