Partie III

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que G est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ puis calculer G'.

2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(1-e^{-x})\ln 2 \leq G(x) \leq \ln 2$. En déduire la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à déterminer.

4. Déterminer l'ensemble K des points en lesquels G^{-1} est dérivable.

Problème 2 — *Ce problème est composé de deux parties totalement indépendantes.*
On se propose de modéliser la participation d'une équipe à deux épreuves du jeu « fort Boyard ».
Dans toute le problème, N désigne un entier naturel non nul.

Partie I

Dans la première épreuve du jeu, une candidate est dans une salle où sont disposées $(N+1)$ jarres opaques numérotées de 0 à N. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, la jarre numéro k contient k clés et $(N-k)$ scorpions.

L'équipe effectue N lancers indépendants d'une pièce donnant « pile » avec probabilité $p \in [0,1]$. La candidate pioche ensuite au hasard un objet dans la jarre dont le numéro correspond au nombre de « piles » obtenus. Par exemple, si on a obtenu quatre « piles » au cours de ces N lancers, la candidate pioche dans la jarre n° 4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de « piles » obtenus lors des N lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la candidate pioche une clé et 0 si elle pioche un scorpion.

1. a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.

2. a) Justifier que, pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $P_{[X=k]}(Y=1) = \dfrac{k}{N}$.

b) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $([X=k])_{k\in[\![0,N]\!]}$, que $P(Y=1) = \dfrac{E(X)}{N}$.

c) Donner la loi de Y et son espérance.

3. *On admet que l'espérance de XY est donnée par* $E(XY) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} kP(X=k\cap Y=1)$.

a) En utilisant la formule précédente montrer que $E(XY) = \dfrac{E(X^2)}{N}$.

b) En déduire la valeur de la quantité $E(XY)-E(X)E(Y)$ en fonction du paramètre p.

Partie II

Dans la seconde épreuve, trois gobelets opaques sont disposés sur un tonneau servant de table de jeu. Deux petites clés sont cachées sous deux des gobelets. Le candidat effectue une série de N essais. A chaque essai, il choisit l'un des trois gobelets au hasard. Si le gobelet est vide, on mélange à nouveau les gobelets. Si le gobelet choisi dissimule une clé, le candidat remporte la clé : celle-ci est enlevée de la table de jeu et on mélange à nouveau les gobelets.
Pour tout $n \in [\![1,N]\!]$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de clés encore présentes sur la table de jeu à l'issue du n^{e} tirage (on convient que $Y_0 = 2$).
On notera pour tout $k \in [\![1,N]\!]$ l'événements C_k : « Lors du k^{e} essai le gobelet choisi dissimule une clé. »

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.

2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?

3. Calculer pour tout entier $n \in [\![1,N]\!]$, $P(Y_n = 2)$.

4. On pose pour $n \in [\![1,N]\!]$, $u_n = P(Y_n = 1)$.

a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.

b) A l'aide du système complet d'événements lié à la variable Y_n, montrer : $\forall n \in [\![2,N-1]\!]$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$.

c) En déduire : $\forall n \in [\![2,N]\!]$, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$. Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n=1$?

d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout $n \in [\![1,N]\!]$.

5. Pour tout entier $n \in [\![1,N]\!]$, calculer l'espérance de Y_n.

6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'essai « éliminant » la dernière clé de la table de jeu (on convient que Z vaut $N+1$ s'il reste encore au moins une clé sur la table à l'issu des N essais).

a) Donner $Z(\Omega)$.

b) Soit $k \in [\![2,N]\!]$. Exprimer l'événement $[Z=k]$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.

c) En déduire la loi de Z.

Exo I.