Par encadrement il vient donc $1-\dfrac{u_n}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *i.e.* $\dfrac{u_n}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $u_n \sim \ln(n+1)$.

(On a même $u_n \sim \ln(n)$, ceci car $\ln(n+1)\sim \ln n$; en effet $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \dfrac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$)

Partie III

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que f est continue sur $[x,2x]$ donc $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut à bon droit en considérer une primitive F sur $\mathbb{R}_+$.
Par définition de l'intégrale, on a alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $G(x) = [F(t)]_x^{2x} = F(2x)-F(x)$.
Aussi sait-on que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que primitive d'une fonction continue) de sorte que par composition puis différence, la fonction G est elle même de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
Par la propriété de dérivation des fonctions composées, on a donc, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $G'(x) = 2F'(2x)-F'(x) = 2f(2x)-f(x)$.
Ainsi, si $x>0$ on a donc $G'(x) = 2\dfrac{1-e^{-2x}}{2x} - \dfrac{1-e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$. Pour $x=0$, on a $G'(0) = 2f(0)-f(0) = 1$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout $t\in[x,2x]$, $0\le e^{-t}\le e^{-x}$ donc $1\ge 1-e^{-t}\ge 1-e^{-x}$ et $\dfrac{1}{t}\ge f(t)\ge (1-e^{-x})\dfrac{1}{t}$.
Par croissance de l'intégrale (et puisque $x\le 2x$), $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \ge G(x) \ge (1-e^{-x})\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
On a donc $[\ln t]_x^{2x} \ge G(x) \ge (1-e^{-x})[\ln t]_x^{2x}$, *i.e.* $(\ln(2x)-\ln x) \ge G(x) \ge (1-e^{-x})(\ln(2x)-\ln x)$ et donc $\ln 2 \ge G(x) \ge (1-e^{-x})\ln 2$.
Puisque $1-e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, on en déduit par encadrement que $G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

3. On applique le théorème de la bijection :
- On sait que G est continue (car de classe C^1) sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $G'(x) = \dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = e^{-x}\dfrac{1-e^{-x}}{x} > 0$. Ainsi G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- Aux bornes de $[0,+\infty[$, on a $G(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \ln 2$.

Le théorème de la bijection assure que G réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $J = [G(0), \displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)[= [0,\ln 2[$.

4. Vu que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, pour tout point $y = G(x)\in J$, on sait d'après le cours que G^{-1} est dérivable en y si et seulement $G'(x)\neq 0$. Or pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $G'(x)>0$. Par conséquent G^{-1} est dérivable sur J entier.

Problème 2 — Partie I

1. a) X compte le nombre de piles obtenus au cours de N lancers indépendants. La probabilité d'obtenir pile à chaque lancer étant p. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)$ et, selon le cours, $E(X) = Np$ et $V(X) = Np(1-p)$.

b) D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2)-E(X)^2$ donc $E(X^2) = V(X)+E(X)^2 = Np(1-p)+N^2p^2 = Np(1-p+Np)$.

2. a) Sachant $[X=k]$, la candidate pioche dans l'urne k qui contient k clés et $N-k$ scorpions. On est en situation d'équiprobabilité donc , $P_{[X=k]}(Y=1) = \dfrac{k}{n}$.

b) Le système complet d'événements $([X=k])_{k\in[\![0,N]\!]}$ est formé d'événements de probabilités non nulles.
Par la formule des probabilités totales, on a $P(Y=1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} P_{[X=k]}(Y=1)P(X=k) = \sum_{k=0}^{N}\frac{k}{N}P(X=k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} kP(X=k) = \frac{1}{N}E(X)$ (ceci car $X(\Omega) = [\![0,N]\!]$)

c) On a $Y(\Omega) = \{0,1\}$ et, d'après la question précédente (et la valeur de $E(X)$), on a $P(Y=1) = \dfrac{E(X)}{N} = \dfrac{Np}{N} = p$.
Donc $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$ et $E(Y) = p$.

3. a) En utilisant la formule de l'énoncé, on a
$E(XY) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k\cap Y=1) = \sum_{k=1}^{n} kP_{[X=k]}(Y=1)P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{k}{N}P(X=k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k^2P(X=k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}k^2P(X=k)$.
On reconnaît la formule donnant le moment d'ordre deux de X, qui donne donc $E(XY) = \dfrac{E(X^2)}{N}$.

b) Utilisant la question précédente et les valeurs trouvées pour $E(X^2)$ et $E(Y)$ on obtient
$E(XY)-E(X)E(Y) = p(1-p+Np) - Np\times p = p(1-p)$.

Exo II.

Partie II

1. A l'issue du premier essai il reste une ou deux clés sur le tonneau (suivant que le gobelet choisi ait ou non dissimulé une clé) : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$. De plus :
- $[Y = 1] = C_1$ et, par équiprobabilité, $P(Y = 1) = P(C_1) = \frac{2}{3}$.
- De même, $P(Y = 2) = P(\overline{C}_1) = \frac{1}{3}$.

2. Si au moins deux essai ont été effectués, il est possible d'avoir obtenu deux, une ou aucune clé. Ainsi, pour $n \geq 2$, $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

3. $[Y_n = 2]$ signifie que l'on n'a obtenu de clé à aucun des n essais : $[Y_n = 2] = \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \cdots \cap \overline{C}_n$.
Par la formule des probabilités composées : $P(Y_n = 2) = P(\overline{C}_1)P_{\overline{C}_1}(C_2) \times \cdots \times P_{\overline{C}_1 \cap \cdots \cap \overline{C}_{n-1}}(\overline{C}_n)$.
Or $P(\overline{C}_1) = \frac{1}{3}$. De plus, pour $k \in [\![2, n]\!]$, sachant $\overline{C}_1 \cap \ldots \overline{C}_{k-1}$, il y a encore deux clés sur le tonneau donc $P_{\overline{C}_1 \cap \cdots \cap \overline{C}_{k-1}}(\overline{C}_k) = \frac{1}{3}$.
On a donc $P(Y_n = 2) = (\frac{1}{3})^n$.

4. a) On a vu en **1.** que $u_1 = P(Y_1 = 1) = \frac{2}{3}$.
$[Y_2 = 1]$ signifie qu'une seule clé à été obtenue au cours des deux premiers essais : $[Y_2 = 1] = (C_1 \cap \overline{C}_2) \cup (\overline{C}_1 \cap C_2)$, il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles donc :
$P(Y = 2) = P(C_1 \cap \overline{C}_2) + P(\overline{C}_1 \cap C_2) = P(C_1)P_{C_1}(\overline{C}_2) + P(\overline{C}_1)P_{\overline{C}_1}(C_2) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
($P_{C_1}(\overline{C}_2) = \frac{2}{3}$ car sachant C_1 il y deux gobelets vides sur les trois au deuxième essai).

b) Pour $n \in [\![2, N-1]\!]$, on sait que $([Y_n = 0], [Y_n = 1], [Y_n = 2])$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. Ainsi, par la formule des probabilités totales :
$u_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P_{[Y_n=0]}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 0) + P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) + P_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 2)$.
Aussi, au $n + 1^{\text{e}}$ tirage :
- Sachant $[Y_n = 0]$, il n'y a plus de clé sur la table donc $P_{[Y_n=0]}(Y_{n+1} = 1) = 0$.
- Sachant $[Y_n = 1]$, il y a une seule clé sur la table et $[Y_{n+1} = 1]$ est réalisé si on choisi l'un des deux gobelet vides (sur les trois) donc $P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$.
- Sachant $[Y_n = 2]$, il y a deux clés sur la table $[Y_{n+1} = 1]$ est réalisé si on choisi l'un des deux gobelet qui contient une clé donc $P_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$.

Par conséquent $u_{n+1} = 0 + \dfrac{2}{3}P(Y_n = 1) + \dfrac{2}{3}P(Y_n = 2) = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{3^n} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$.

c) Par récurrence (finie) sur n, montrons : $\forall n \in [\![2, N]\!]$, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.
- Pour $n = 2$, on a vu que $u_2 = \dfrac{2}{3}$ et on a $2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{2}{3^2} = \dfrac{8}{9} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.
- Pour $n \in [\![2, N-1]\!]$, supposons que l'on ait $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.
Alors $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} - 2\dfrac{2}{3^{n+1}} + \dfrac{2}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} - \dfrac{2}{3^{n+1}}$, ce que l'on voulait.

On a donc $\forall n \in [\![2, N]\!]$, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$.
Lorsque $n = 1$, on a vu que $u_1 = \dfrac{2}{3}$ et $2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1 - \dfrac{2}{3^1} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$ donc la relation est encore vraie.

d) Pour $n \geq 2$, $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, donc on sait par le cours que $P(Y_n = 0) + P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2) = 1$ d'où
$P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 1) - P(Y_n = 2) = 1 - \left(2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}\right) - \dfrac{1}{3^n} = 1 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{1}{3^n}$.
La formule obtenue est encore vraie pour $n = 1$ puisque $1 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1 + \dfrac{1}{3^1} = 0 = P(Y_1 = 0)$.

5. On a $E(Y_n) = 0 \times P(Y_n = 0) + 1 \times P(Y_n = 1) + 2 \times P(Y_n = 2)$ (formule qui est aussi vraie pour $n = 1$).
Ainsi $E(Y_n) = u_n + 2 \times \dfrac{1}{3^n} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n} + \dfrac{2}{3^n} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

6. a) Au plus tôt, la dernière clé peut être obtenue au deuxième essai. Au plus tard, il reste encore au moins une clé sur la table à l'issue des N essais. Par suite $Z(\Omega) = [\![2, N+1]\!]$.

b) Soit $k \in [\![2, N]\!]$. $[Z = k]$ signifie qu'il n'y a plus de clé sur la table après le k^{e} essai et qu'il n'en restait qu'une après le $k - 1^{\text{e}}$: $[Z = k] = [Y_{k-1} = 1] \cap [Y_k = 0]$.

c) Pour $k \in [\![2, N]\!]$, on a $P(Z = k) = P(Y_{k-1} = 1)P_{[Y_{k-1}=1]}(Y_k = 0) = u_{k-1}P_{[Y_{k-1}=1]}(C_k) = u_{k-1} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} - \dfrac{2}{3^{k-1}}\right) = \dfrac{2^k - 2}{3^k}$.
$[Z = N+1]$ signifie qu'il reste au moins une clé sur la table à l'issue du N^{e} essai donc $[Z = N+1] = \overline{[Y_N = 0]}$ et
$P(Z = N+1) = 1 - \left(1 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^N + \dfrac{1}{3^N}\right) = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^N - \dfrac{1}{3^N}$